Matematika A1 – 1. „písemné" cvičení

V „písemném" cvičení budou řešeny některých příkladů z příkladů k danému cvičení zadaných jako návody pro „samocvičení" – tj. pro samostatné vyřešení příkladů a problémů dalších, případně i pro pomoc při vypracování zadaných „domácích" úkolů.

Řešené příklady z „výběru" pro 1. cvičení (7.10.20)

I. Řešení nerovnic

1) $x^2+3x+1 \geqq -1$ (kvadratická nerovnice)

návod: nerovnici upravíme na nerovnici „typu"
$$x^2+bx+c \geqq 0 \; (\text{resp. } x^2+bx+c>0, \text{ resp. } x^2+bx+c \leqq 0 \; (<0))$$
a pak už vlastně jen „hledáme" znaménko kvadratického trojčlenu x^2+bx+c", což (asi) umíte:

a) graficky (pomocí grafu, tj. „znázornění" kvadratické funkce $y=x^2+bx+c$) – „může nastat", že

(i) polynom x^2+bx+c má dva různé reálné kořeny, tj. $\alpha_1, \alpha_2 \in R$, $\alpha_1 \neq \alpha_2$, nechť $\alpha_1 < \alpha_2$. (diskriminant $D>0$)

(ii) kořeny polynomu x^2+bx+c jsou reálné, ale „stejné": $\alpha_1=\alpha_2=\alpha$ $(D=0)$

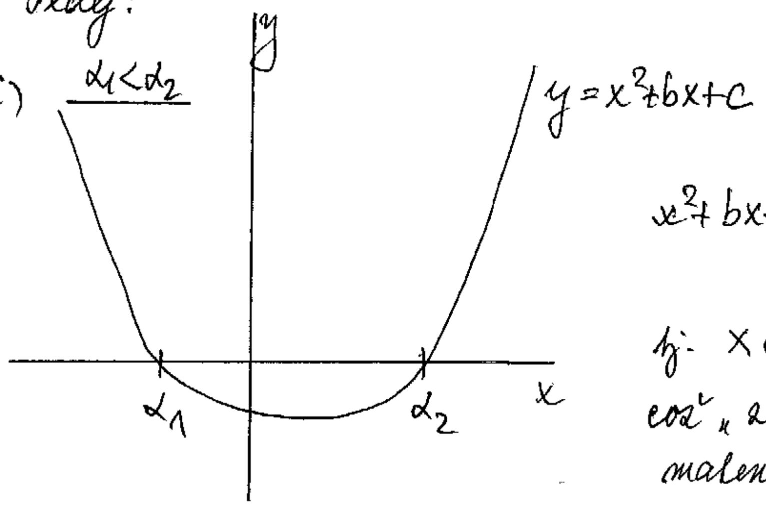
(iii) kořeny polynomu jsou komplexní $(D<0)$:
$$\alpha_{1,2} = \beta \pm i\gamma \;, \quad \beta, \gamma \in R$$

(a víme, že grafem funkce $y=x^2+bx+c$ je parabola)

„Víme", že grafem funkce $y = x^2+bx+c$ je parabola „mířící" „nahoru", a pokud $D \geqq 0$, průsečíky grafu a osy x jsou „nulové" body funkce, je-li $D<0$, graf nemá průsečíky s osou x.

Tedy:

(i) $\underline{\alpha_1<\alpha_2}$



a tedy odtud (z grafu) „vidíme", že:

$x^2+bx+c \geqq 0 \iff x \leqq \alpha_1$ a nebo $x \geqq \alpha_2$,

tj. $x \in (-\infty, \alpha_1\rangle$ nebo $x \in \langle\alpha_2, +\infty)$, což „zapisujeme" (pomocí symbolů matematické logiky)

$x \in (-\infty,\alpha_1\rangle \ \vee \ x \in \langle\alpha_2,+\infty)$, tj.

neboli $\underline{x \in (-\infty,\alpha_1\rangle \cup \langle\alpha_2,+\infty)}$ (množinově)

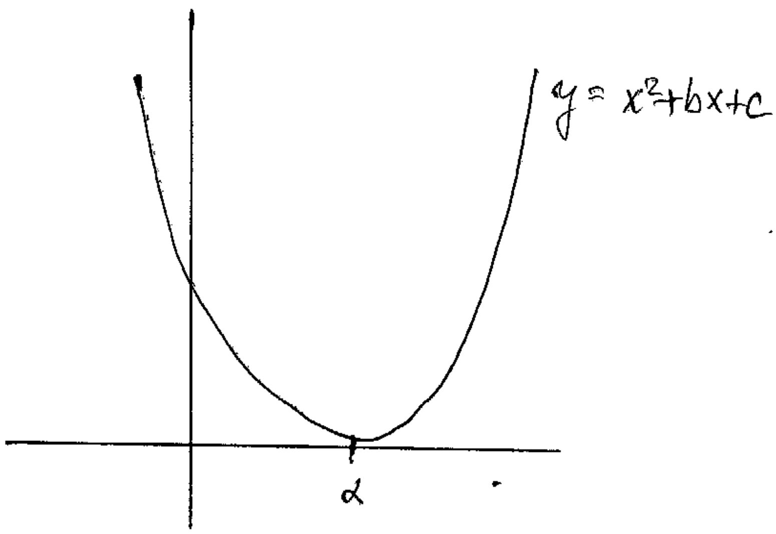
Kdybychom řešili nerovnici $x^2+bx+c<0$, pak platí:

$$x^2+bx+c<0 \iff \alpha_1<x<\alpha_2 \iff x \in (\alpha_1,\alpha_2)$$

(a dále $x^2+bx+c>0 \iff x \in (-\infty,\alpha_1) \cup (\alpha_2+\infty)$ a

$x^2+bx+c \leqq 0 \iff x \in \langle\alpha_1,\alpha_2\rangle$;

(ii) $\underline{\alpha_1=\alpha_2=\alpha}$



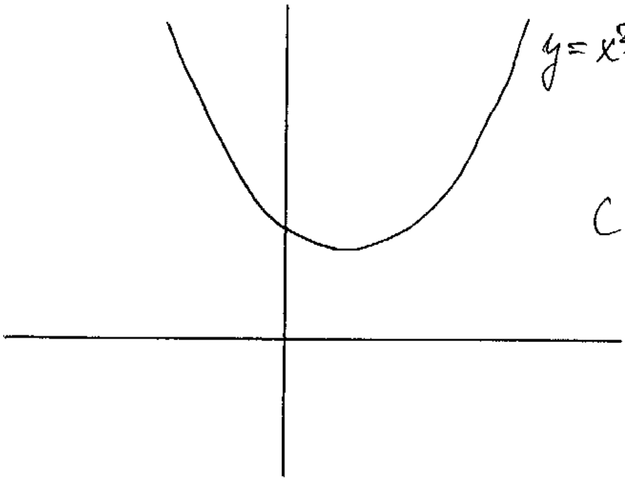
zde: $x^2+bx+c \geqq 0$ pro všechna $x \in R$;

$x^2+bx+c>0$ pro $x \in R \setminus \{\alpha\}$ (tj. pro $x \in (-\infty,\alpha) \cup (\alpha,+\infty)$)

$x^2+bx+c<0$ nemá řešení!

a $x^2+bx+c \leqq 0 \iff x=\alpha$;

(iii) $\alpha_{1,2} = \beta \pm i\gamma$, $\beta,\gamma \in R$: pak



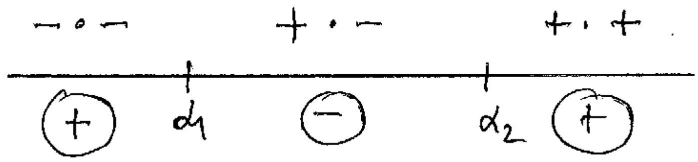
$y=x^2+bx+c$ a tedy platí:

$x^2+bx+c \geq 0$ pro všechna $x\in R$
(i $x^2+bx+c>0$ pro všechna $x\in R$)
a $x^2+bx+c<0$ nemá řešení

A ještě poznámka:

V případech (i) a (ii) lze řešit nerovnosti „uvažované nahoře" jednoduše i třeba takto:

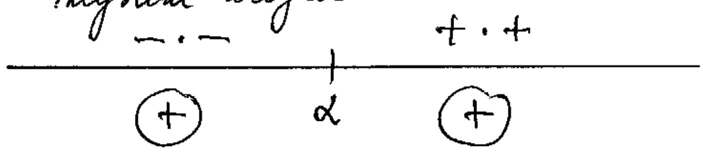
(i) $\alpha_1<\alpha_2$, $\alpha_1,\alpha_2\in R$: pak $x^2+bx+c = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)$ (*)
($(x-\alpha_1)$ a $(x-\alpha_2)$ se nazývají kořenové činitele)
a tedy součin (*) bude >0, jestliže oba výrazy $(x-\alpha_1)$ a $(x-\alpha_2)$ budou „mít" stejná znaménka, a bude <0, jestliže znaménka jejich budou různá – lze to takto „zpřehlednit" (na reálné ose):



pro $x<\alpha_1$ je $x-\alpha_1<0$ i $x-\alpha_2<0$
pro $\alpha_1<x<\alpha_2$ je $x-\alpha_1>0$ a $x-\alpha_2<0$
pro $x>\alpha_2$ je $x-\alpha_1>0$ i $x-\alpha_2>0$

a odtud je řešení nerovnice $x^2+bx+c>0$ (resp. <0) už také jednoduše „vidět"

(ii) myslím zřejmé!

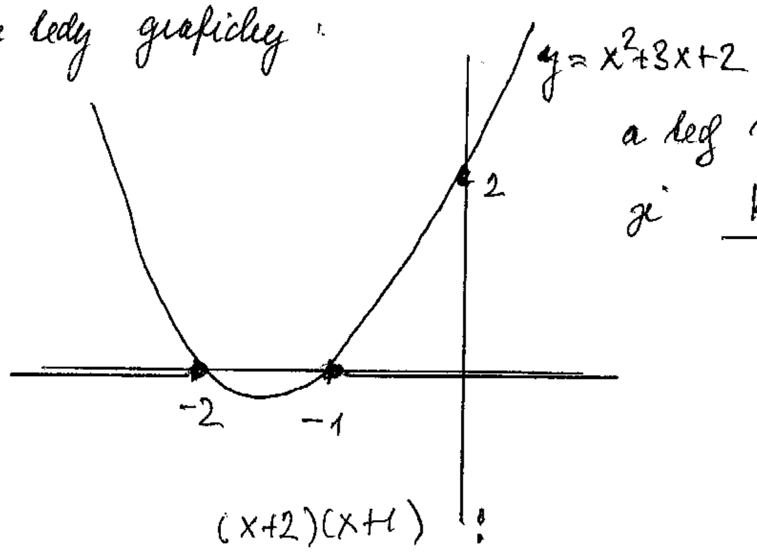


a (konečné) řešení zadaného příkladu:

(i) $x^2+3x+1 \geqq -1$ upravíme na $x^2+3x+2 \geqq 0$ (*)

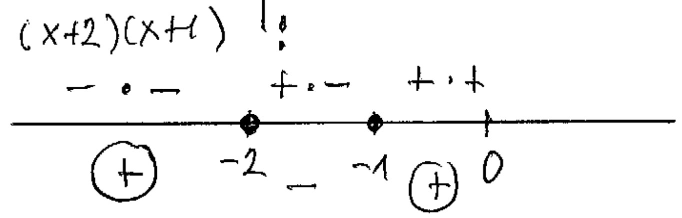
(ii) $x^2+3x+2 = (x+2)(x+1)$ („každý umí"), tj. $\alpha_1=-2, \alpha_2=-1$

a tedy graficky:



a tedy množina řešení nerovnice (*) je $K = (-\infty,-2\rangle \cup \langle -1,+\infty)$ (**)

nebo:



tj. opět vidíme výsledek (**)

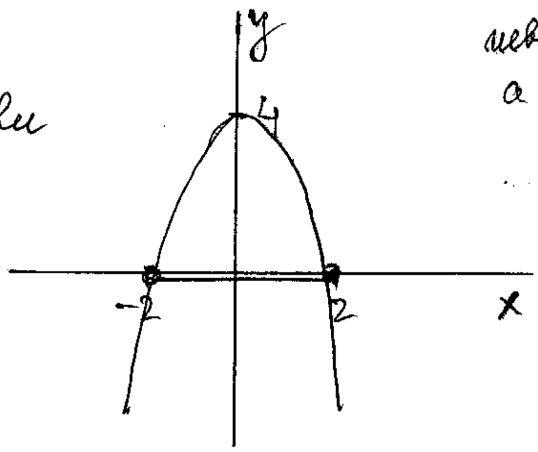
2) nerovnice $x^2 \leqq 4$ ($\Leftrightarrow x^2-4 \leqq 0 \Leftrightarrow 4-x^2 \geqq 0$)

a) lze řešit „stejně" jako úlohu 1):

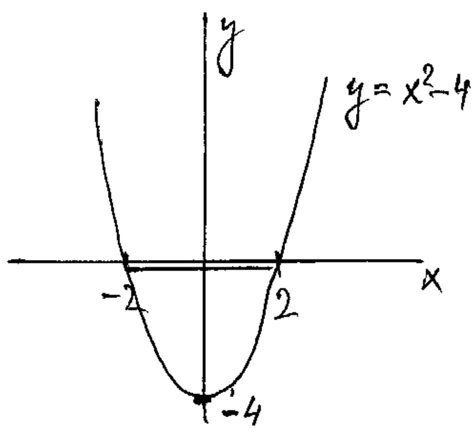
$x^2 \leqq 4 \Leftrightarrow 4-x^2 \geqq 0 \Leftrightarrow (2-x)(2+x) \geqq 0 \Leftrightarrow (x-2)(x+2) \leqq 0$ (násobení (-1))

tj. řešení je $K = \langle -2,2\rangle$

b) též graficky hned pomocí grafu fce $y=4-x^2$



nebo pomocí grafu fce $y=x^2-4$ a řešení nerovnice $x^2-4 \leqq 0$



c) ale jistě můžeme nerovnici „odmocnit", neboť platí:

pro lib. $a \geqq 0$, $b \geqq 0$:

$$0 \leq a \leq b \iff \sqrt{a} \leqq \sqrt{b}$$

(neboť funkce $y=x^2$ je rostoucí v $\langle 0,+\infty)$, a funkce $y=\sqrt{x}$ je též rostoucí v $\langle 0,\infty)$, takže umocnění nerovnosti, resp. odmocnění, v oboru $\langle 0,+\infty)$ lze se zachováním „znaménka" v nerovnosti)

tedy zde lze:
$$x^2 \leqq 4 \quad | \sqrt{\ }$$
$$\sqrt{x^2} \leqq 2$$
, a zde pozor! $\sqrt{x^2}=|x|$!)

tedy dostáváme $|x| \leqq 2$

a jsme u nerovnic s absolutní hodnotou – tedo „neumí", chvilku počká, tedo „umí", „už vidí", že $K = \langle -2,2\rangle$ (opět)

3) $\dfrac{3x-1}{x-2} > 1$ (nerovnice s neznámou ve jmenovateli)

stručný návod:

Tento typ nerovnice není vhodné řešit jako rovnici, tj. vynásobením jmenovatelem získat nerovnici „bez zlomku", neboť výraz, zde ve jmenovateli, může „měnit" znaménko v závislosti na x (obecně, třeba u x^2+1 tomu tak není), a tak musíme pak při násobení nerovnice jmenovatelem zvažovat, tedy je jmenovatel kladný, resp. záporný a v úpravě nerovnice s tím „počítat". Vhodnější je opět zlomek srovnávat s „0", tj. hledat znaménko zlomku (podobně jako znaménko součinu v minulém příkladu)

Tedy zde:

$$\frac{3x-1}{x-2} > 1 \iff \frac{3x-1}{x-2} - 1 > 0 \iff \frac{2x+1}{x-2} > 0$$

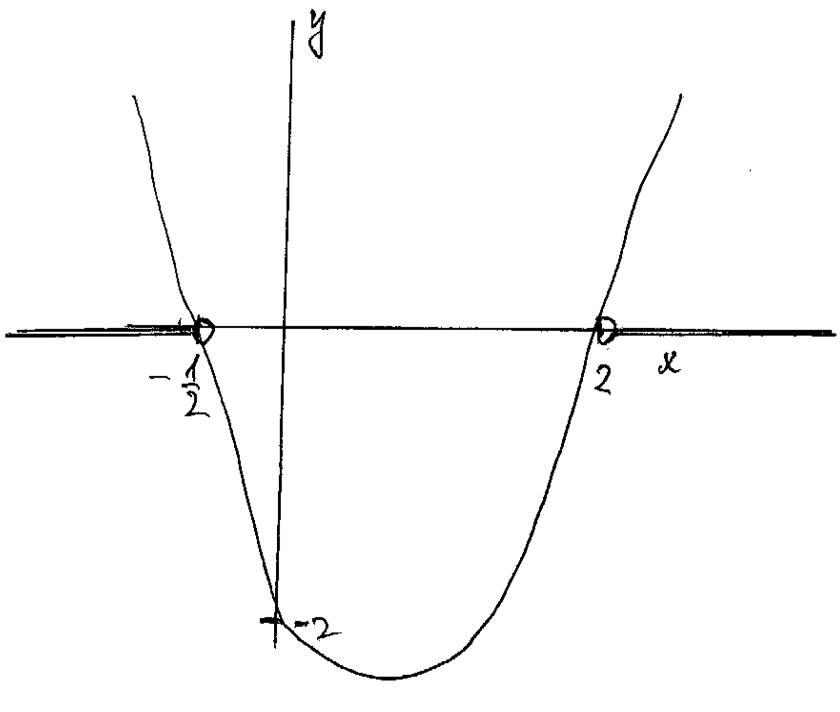
A „stejně" jako u součinu v minulém příkladu 1), čitatel mění znaménko v nulovém bodě $x=-\frac{1}{2}$, jmenovatel v bodě $x=2$: a pak jednoduše dostaneme: $x \neq 2$, neboť $x-2 \neq 0$ (nesmí být)

	$-\frac{1}{2}$		2	
$-$ / $-$		$+$ / $-$		$+$ / $+$
$+$		$-$		$+$

Tedy, množina řešení dané nerovnice je $K = (-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (2, +\infty)$

A poznámka:

ještě je možné si „uvědomit", že výraz $\frac{2x+1}{x-2}$ má stejné znaménko jako součin $(2x+1)(x-2)$ (pro $x \neq 2$), tedy lze užít i grafu paraboly $y=(2x+1)(x-2)$:



(trochu nepovedená parabola, omlouvám se)

a množinu řešení $(-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (2, +\infty)$ zde snadno vidíme též.

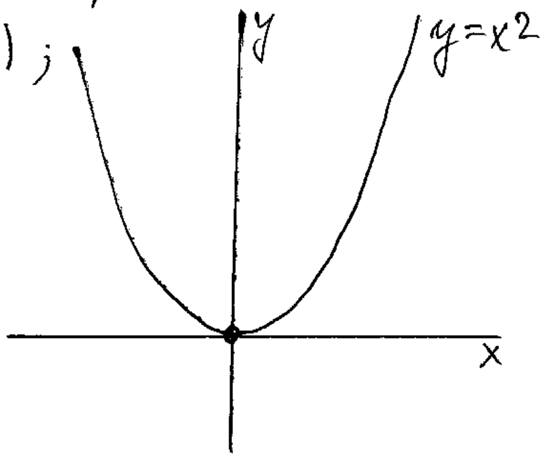
- A zkuste dále sami vyřešit i další příklady v odstavci I/2 (ii) iii)

4) $\sqrt{x+2} < 1$ (nerovnice s odmocninou)

(trochu „nebezpečné")

(i) nejprve musíme respektovat, že $\sqrt{x+2}$ je definována pro $x+2 \geqq 0$ („taháková" vlastnost funkce $\sqrt{x}$), tj. řešení budou jen v intervalu $\langle -2, +\infty)$ $(x+2 \geqq 0 \Leftrightarrow x \geqq -2)$

(ii) abychom se „dostali" k hledanému „x", měli bychom nerovnici umocnit – a právě zde se musí dávat pozor! – – a vzít v úvahu vlastnosti funkce, pomocí které se „likviduje" $\sqrt{x}$, tj. kvadratické funkce $f(x) = x^2$ (neboť pro $x \geqq 0$ je $(\sqrt{x})^2 = x$);



funkce $f(x) = x^2$ je rostoucí v $\langle 0, +\infty)$, tedy platí:

$$0 \leqq a < b \Rightarrow a^2 < b^2$$

ale klesající v $(-\infty, 0\rangle$, tedy zde

$$a < b \leqq 0 \Rightarrow a^2 > b^2$$

a pokud je $a < 0 < b$, pak nelze o uspořádání a^2, b^2 obecně nic říci – příklady:

$-1 < 2$ a $(-1)^2 < 2^2$, ale

$-2 < 1$ a pak $(-2)^2 > 1^2$ a dále i

$-2 < 2$, ale $(-2)^2 = 2^2$!

Tedy poučení – na umocňování „na druhou" (a stejně při libovolném sudém exponentu) se musí dávat pozor!

Ale zde v našem příkladu to je jednoduché (neboť $\sqrt{x} \geq 0$):

$$0 \leq \sqrt{x+2} < 1 \quad \Big|^2 \iff x+2 < 1 \iff x < -1$$

$(\Rightarrow$ v (i)$)$

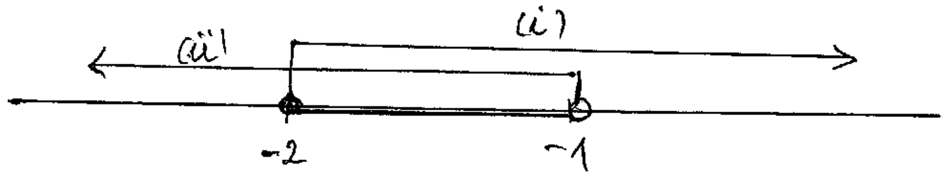
<u>Tedy závěr</u>: „x" bude řešením nerovnice $\sqrt{x+2} < 1$, když

(i) $x \geq -2$ (tj. $x \in \langle -2, +\infty)$) a zároveň

(ii) $x < 1$ (tj. $x \in (-\infty, -1)$) ,

tedy $x \in \langle -2, +\infty)$ a zároveň má být $x \in (-\infty, -1)$, tj.

$$\underline{x \in \langle -2, +\infty) \cap (-\infty, -1) = \langle -2, -1)}$$

(pro pomoc: 

)

5) $\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} > 2$ (nerovnice s neznámou ve jmenovateli a ještě navíc, s odmocninou)

(i) víme už, že $x \in \langle 0, +\infty)$, aby byla definovaná $\sqrt{x}$

(ii) jmenovatel $\sqrt{x} - 1 \neq 0 \iff x \neq 1$, tj. řešení dané nerovnosti bude podmnožinou množiny $\langle 0, 1) \cup (1, +\infty)$

(iii) budeme řešit nejprve „nerovnici se zlomkem a neznámou ve jmenovateli - můžeme si zjednodušit „pohled" na tuto nerovnici, substitucí" $\sqrt{x} = a$ $\quad (a \in \langle 0, 1) \cup (1, +\infty))$

tj. řešíme nerovnici

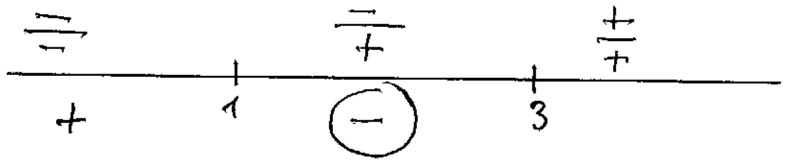
$$\underline{\frac{a+1}{a-1} > 2 \quad \text{v oboru} \quad \langle 0, 1) \cup (1, +\infty) :}$$

A zde postupujeme tak v příkladu 3) (už zde „rychleji"):

dostaneme: $\frac{a+1}{a-1} > 2 \iff \frac{a+1}{a-1} - 2 > 0 \iff \frac{3-a}{a-1} > 0 \iff$

$$\frac{a-3}{a-1} < 0$$

A když „víme", že čitatel mění znaménko" v bodě $a=3$, a jmenovatel v bodě $a=1$, máme „hned", že nerovnici řeší a, tedy $a \in (1,3)$ tj. $1 < a < 3$



a pro pro x: ($a=\sqrt{x}$) dostaneme nerovnici

$1 < \sqrt{x} < 3$, tj. $1 < x < 9$.

Tedy, množina řešení zadané nerovnice je $K = (1, 9)$.

II. Absolutní hodnota (v R)

Co bychom měli „vědět" („tahák")

Definice absolutní hodnoty reálného čísla $a \in R$: $|a|$

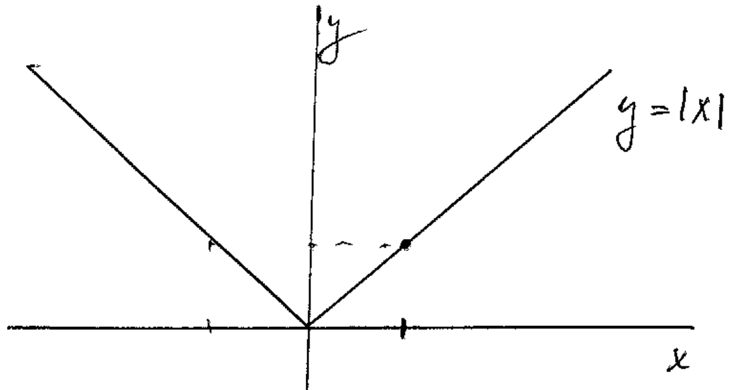
1. $|a| = \begin{cases} a, & \text{je-li } a \geq 0 \\ -a, & \text{je-li } a < 0 \end{cases}$

2. („geometrická"): Je-li $a \in R$, pak $|a|$ je rovna vzdálenosti obrazu čísla a na reálné ose od počátku, tj. od bodu $a=0$.

3. Když každému reálnému číslu $x \in R$ přiřadíme jeho absolutní hodnotu $|x|$, „máme" funkci s def. oborem R:

$f(x)=|x|$ ($D_f = R$, $H_f = \langle 0, +\infty)$)

graf f:



($f(x)=x$, $x \geq 0$, $f(x)=-x$ pro $x<0$)

A co se ještě „hodí" (promyslete, a ukažte si, pokud chcete):

1) $|a| = \max(a,-a)$ ($\max(\alpha,\beta)$ − maximální z čísel α,β)
2) $(a \leq c \wedge -a \leq c) \Rightarrow |a| \leq c$
3) $|a| = |-a|$

Příklad 1(*) nedáme na závěr cvičení (zatím nepovinné znát, později užitečné a důležité).

Příklad 2.

(i) řešení rovnice $||x-2|-3| = 5$;

rovnici s absolutní hodnotou buď řešíme tak, že absolutní hodnotu „odstraníme" (tj. využijeme definice 1.) a pak řešíme rovnici „jednodušší" (v našem příkladu to bude rovnice lineární; nebo užijeme grafický „pohled" na úlohu, občas je pak řešení jednodušší (udělejme to opakování funkcí), nebo kombinujeme, je-li to vhodné, oba „přístupy":

Zde: nejprve odstraníme „absolutní hodnotu" v $|x-2|$:

$$|x-2| = \begin{cases} x-2, & \text{pro } x \geqq 2 \quad (x \in \langle 2,+\infty)) \\ 2-x, & \text{pro } x<2 \quad (x \in (-\infty,2)) \end{cases};$$

tedy dostáváme:

1) $x \in \langle 2,+\infty)$: $|x-2-3| = 5$, tj. $|x-5|=5$

a zde je zřejmé, že buď $x=0 \notin \langle 2,+\infty)$, nebo $x_1 = 10 \in \langle 2,+\infty)$

2) $x \in (-\infty,2)$: $|2-x-3| = 5$, tj. $|-x-1| = 5 \iff$

$\iff |x+1| = 5$

a zde užijeme (pro změnu) definici 2. –
$|x+1|$ lze „chápat" jako vzdálenost bodu „$(x+1)$" od počátku, (což je totéž, jako vzdálenost bodu „x" od bodu „-1"), má-li být vzdálenost bodu „$x+1$" od počátku 5, pak buď $x = 4 \notin (-\infty,2)$ nebo $x_2 = -6 \in (-\infty,2)$;

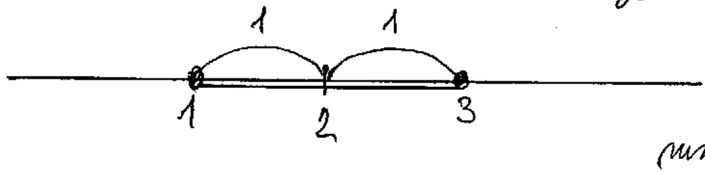
Tedy, řešení naší rovnice jsou $x_1 = 10$ a $x_2 = -6$.

Důležité pro naši „budoucnost" – promyslete:

Jsou-li a, b reálná čísla, pak $|a-b| = |b-a|$ je vzdálenost obrazů čísel a, b na reálné ose.

(ii) nerovnice $|x-2| \leqq 1$

může být „chápána" takto – máme najít všechna $x \in R$, jejichž vzdálenost od bodu $x=2$ je menší, nebo rovna 1:



tedy $1 \leqq x \leqq 3$, nebo

množina řešení je $\langle 1,3\rangle$

Řešení dané nerovnice „odstraněním" absolutní hodnoty je „méně" šikovné – ukážeme si:

$$|x-2| \leq 1$$

buď a) $x-2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$, pak $|x-2| = x-2$ a nerovnice je $x-2 \leq 1$, tj. $x \leq 3$,

tj. $2 \leq x \leq 3$ ($x \in \langle 2,3\rangle$)

nebo b) $x-2 < 0 \Leftrightarrow x < 2$, pak $|x-2| = -(x-2) = 2-x$ a dostaneme $2-x \leq 1$, tj. $1 \leq x$,

tedy zde v b) $1 \leq x < 2$ ($x \in \langle 1,2)$)

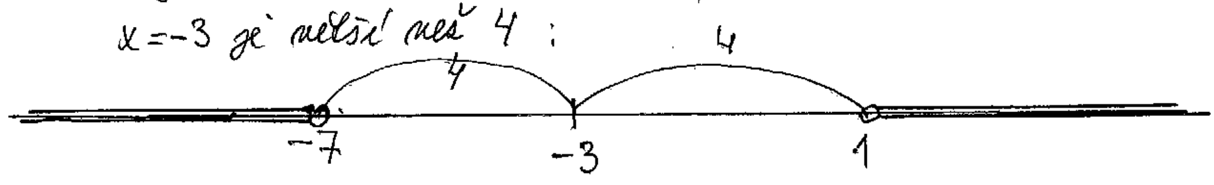
A závěr: $x \in \langle 2,3\rangle$ (a) nebo $x \in \langle 1,2)$, tedy (dle definice sjednocení množin) $x \in \langle 1,2) \cup \langle 2,3\rangle$, tj. $x \in \langle 1,3\rangle$

(neboli $\langle 1,3\rangle$ je množina řešení dané nerovnice)

Dále už (snad) umíme rychleji:

(iii) $|x+3| > 4 \Leftrightarrow |x-(-3)| > 4$ –

tedy, hledáme všechna x taková, že jejich vzdálenost od bodu $x=-3$ je větší než 4:

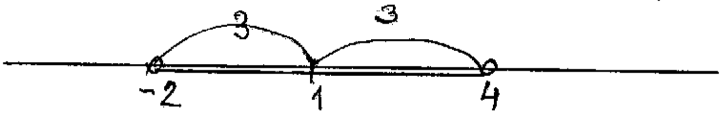


tj. množina řešení dané nerovnice je $(-\infty,-7) \cup (1,+\infty)$

(iv) soustava nerovnic: $|x-1| < 3 \wedge |x+5| \geq 4$, tj.

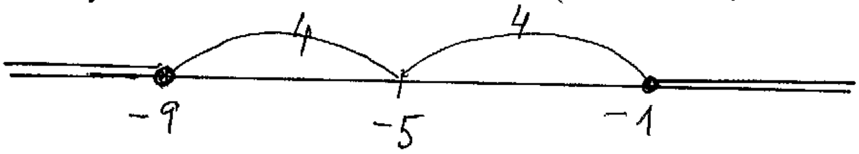
$$|x-1| < 3 \wedge |x-(-5)| \geq 4$$

a) $|x-1| < 3 \iff x \in (-2, 4)$



a současně má platit

b) $|x-(-5)| \geq 4 \iff x \in (-\infty, -9\rangle \cup \langle -1, +\infty)$



tedy, když má platit $x \in (-2,4)$ a současně $x \in (-\infty,-9\rangle \cup \langle -1,+\infty)$, dle definice průniku dvou množin

$$x \in (-2,4) \cap \left((-\infty,-9\rangle \cup \langle -1,+\infty) \right) \text{, tj.}$$

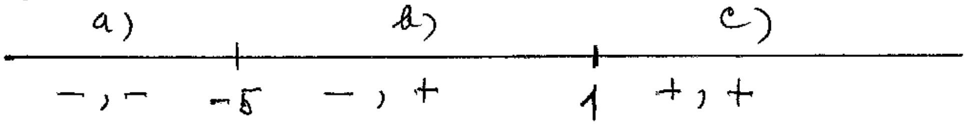
$$\underline{x \in \langle -1, 4)}$$

v) $\underline{|x-1| < |x+5|}$ (a nerovnice $\left|\frac{x+1}{x-1}\right| \leq 1$ zkuste „sami")

(i) řešení „odstraněním" absolutních hodnot (zde potřebujeme „znaménka" výrazů $(x-1)$, $(x+5)$ – podobně příkladům pro řešení kvadratické nerovnice či nerovnice se zlomky);

Výraz $(x-1)$ mění znaménko v bodě $x=1$,
$(x+5)$ —"— v bodě $x=-5$,

tedy máme:



a) $x \in (-\infty, -5)$: $\quad -(x-1) < -(x+5)$

$x-1 > x+5$, tj. $-1 > 5$ neplatí

– zde nerovnice nemá řešení

nebo

b) $x \in \langle -5, 1)$: $\quad -(x-1) < x+5$

$-4 < 2x \iff \underline{-2 < x}$

tj. $x \in \langle -2, 1)$

nebo

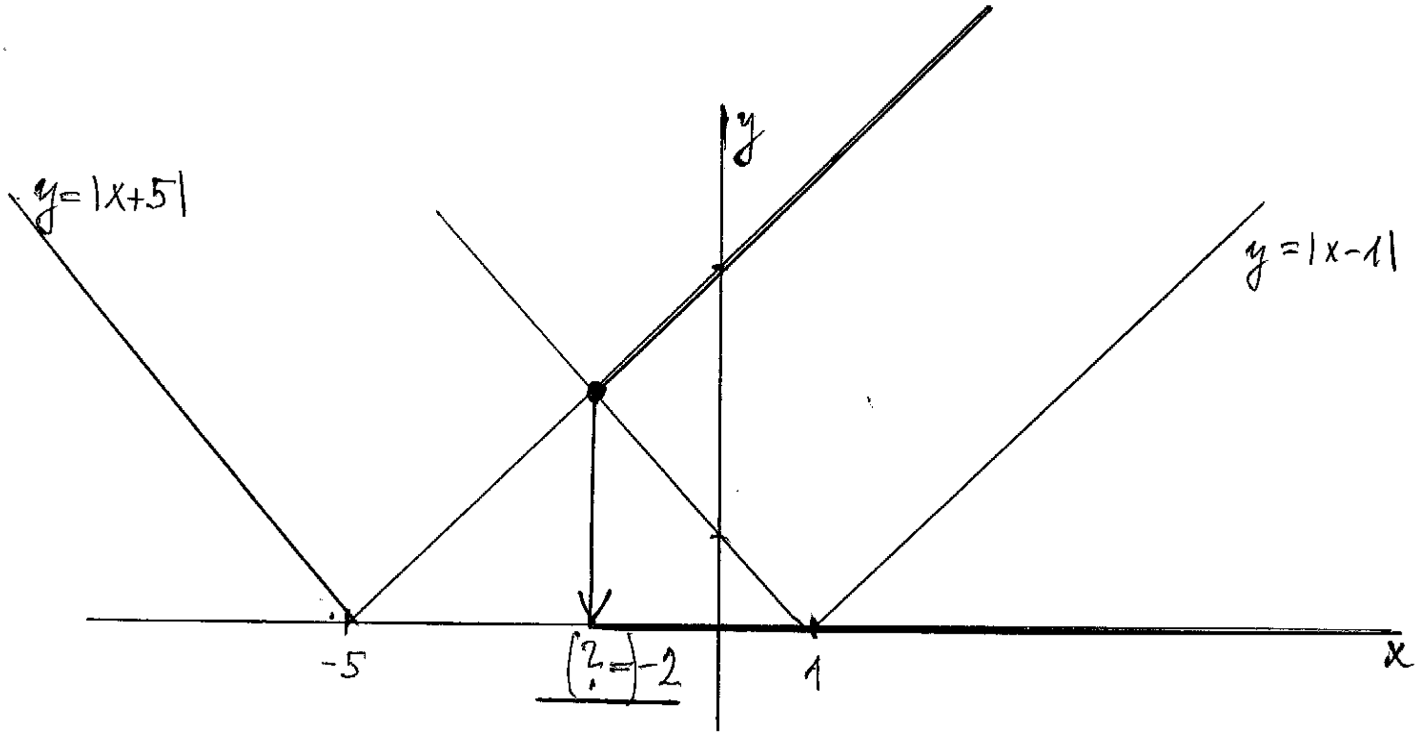
c) $x \in \langle 1, +\infty)$: $\quad x-1 < x+5 \iff -1 < 5$ – platí

(pro všechna $x \in \langle 1, +\infty)$)

tj. řešení: $x \in \langle -2, 1)$ (b) nebo $x \in \langle 1, +\infty)$, tedy

množina řešení $\underline{K = \langle -2, 1) \cup \langle 1, +\infty) = \langle -2, +\infty)}$

(ii) nebo řešení užitím grafu funkcí $f(x) = |x-1|$ a $g(x) = |x+5|$:



má-li být $|x-1| < |x+5|$, „hledáme", kde je graf funkce $g(x) = |x+5|$ „nad" grafem $f(x) = |x-1|$ (včetně průsečíku grafů.

a ? : řešme $\quad x+5 = -(x-1) \iff 2x = -4 \iff \underline{x = -2}$