

MAI 1 – 3. a 4. cvičení

Spočetné množiny:

Zopakujte si, co znamená, že množina M je spočetná.

Dokažte:

1. Necht' množiny A, B jsou spočetné, pak také množina $A \times B$ je spočetná.
Necht' množiny A_1, A_2, \dots, A_n jsou spočetné, pak také množina $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ je spočetná.
2. Množina všech uspořádaných n -tic racionálních čísel ($n \in \mathbb{N}, n \geq 2$) je spočetná.
3. Sjednocení konečně mnoha nebo spočetně mnoha spočetných množin je spočetná množina.
4. Množina všech konečných posloupností prvků dané spočetné množiny je spočetná.
5. Množina všech polynomů s racionálními koeficienty je spočetná.

Nekonečné posloupnosti (zopakujte si definici posloupnosti reálných čísel):

1. Co znamená, že posloupnost je omezená shora, resp. omezená zdola, resp. omezená?
Zopakujte také definice: posloupnost je rostoucí, resp. neklesající, resp. klesající, resp. nerostoucí.
Vyšetřete, zda některou z těchto vlastností mají posloupnosti:

a) $\left\{ \frac{1}{n} \right\}$; b) $\left\{ \frac{(-1)^n}{n} \right\}$ c) $\left\{ \frac{n-1}{n+1} \right\}$; d) $\left\{ \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \right\}$ e) $n \cdot (\sqrt{n^2+1} - n)$;
e) $\{q^n\}$ pro (i) $q \in (-1, 1)$, (ii) pro $q \in (1, \infty)$, (iii) pro $q \leq -1$.

- 2*. a) Ukažte, že rekurentně definovaná posloupnost $\{a_n\}$, kde $a_1 = \sqrt{2}$, $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$ je rostoucí a shora omezená.
b) Ukažte, že rekurentně definovaná posloupnost $\{a_n\}$, kde $a_1 = 10$, $a_{n+1} = 6 - \frac{5}{a_n}$ je klesající a zdola omezená.

Definice limity posloupnosti:

1. Dokažte z definice, že $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1$; $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sin n = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} = \infty$.
2. Dokažte, že platí: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = 0$.
3. Ukažte, že platí:
a) $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$ pro $q \in (-1, 1)$ a $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = +\infty$ pro $q \in (1, \infty)$, pro $q \leq -1$ posloupnost $\{q^n\}$ limitu nemá;
b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$ pro $a \in (0, \infty)$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$.
4. Dokažte, že platí: má-li posloupnost $\{a_n\}$ limitu a , má každá vybraná posloupnost tutéž limitu.
5. Ukažte, že posloupnost $\{a_n\}$, kde $a_n = \sin \frac{n\pi}{2}$, $n \in \mathbb{N}$, nemá limitu.
6. Rozhodněte, zda platí následující tvrzení (a dokažte, že platí nebo opravte tak, aby tvrzení platilo):
a) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = |a|$;
b) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n} = a$ a $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n+1} = a \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$.
c) necht' $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ jsou konvergentní posloupnosti a necht' $\exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n > n_0 : a_n < b_n$,
pak $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n < \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$;
d) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n < \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n > n_0 : a_n < b_n$.

7. Necht' $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ a $b_n = (-1)^n a_n$. Vyšetřete existenci $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ (užijte 4.).

8. Dokažte následující tvrzení :

- a) posloupnost $\{a_n\}$ je konvergentní \Rightarrow posloupnost $\{a_n\}$ je omezená ;
 b) posloupnost $\{a_n\}$ je konvergentní \Rightarrow posloupnost $\{a_n\}$ je cauchyovská ;
 c) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ a posloupnost $\{b_n\}$ je omezená $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = 0$.

Výpočet limity posloupnosti:

1. Vypočítejte limity:

- a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3 + 1}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{n+1}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 2n - 1}{2n^2 - n + 5}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + n - 14}{2n^2 - n + 5}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - 1}{2n^3 - 3n + 1}$,
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n - 2^{-n}}{2^n}$; $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n - 2^n}{4^n + 3^{n+1}}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n + n!}{-2^n + 3 \cdot n!}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-3)^n + n!}{-2^n + 3 \cdot n!}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n + (-1)^n n!}{-2^n + 3 \cdot n!}$,
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n - 2n!}{n^4 + 3n^n}$,
 b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + 1}}{n}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + 1} - \sqrt{n}}{\sqrt[4]{n^2 + 1} - n}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^3} - (-1)^n n^2}{3n^2 + \sqrt[3]{n^2}}$
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2^n + 3^n + 4^n}$;
 c) $\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot (\sqrt{n^2 + 1} - n)$, $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$, $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + n + 1} - \sqrt{n^2 + 1})$.

2. Ukažte, že platí : $\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N q^n = \frac{1}{1-q} \Leftrightarrow q \in (-1, 1)$.

3. Ukažte, že platí : $\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N a_n \in \mathbb{R} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

4. Vyšetřete existenci limity ($n \in \mathbb{N}$) (lze užít tvrzení v 4. z první části úloh) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n n^2}{3n^2 + n}$.

5. Dokažte větu o limitě sevržené posloupnosti. Modifikujte tuto větu i pro nevlastní limity.

6. Pomocí vět v příkladu 5. dokažte :

- a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sin n = 0$, b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \cos nx = 0$, c) $\lim_{n \rightarrow \infty} (n + \sin n) = \infty$, d) $\lim_{n \rightarrow \infty} n(3 + \sin n) = \infty$
 e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} = 0$, f) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{n!} = 0$.

7. Vypočítejte limitu $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n^2 + 1} + \frac{1}{n^2 + 2} + \dots + \frac{1}{n^2 + n} \right)$.

8. Ukažte, že $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n + \sqrt{1}} + \frac{1}{n + \sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{n + \sqrt{n-1}} + \frac{1}{n + \sqrt{n}} \right) = 1$