

MAI 1 - domácí úkol ze cvičení 1:

1. Načrtněte grafy funkcí (bez užití diferenciálního počtu)

$$f_1(x) = ||x-1|-1|, \quad f_2(x) = ||x-1|^2 - 1|, \quad f_3(x) = \exp(-|x|), \quad f_4(x) = |\ln|x||$$

a třeba i zkuste graf funkce $f_5(x) = \exp\left(\frac{1}{x}\right)$ ($\exp x = e^x$).

2. V R řešte nerovnice

a) $|x^2 + 2x - 3| \geq |x^2 + 3x - 4|$; b) $\frac{\ln|x|}{4-x^2} \geq 0$;

c) $\sqrt{x-2} + x > 4$; d) $\sqrt{x^2 + 2x - 3} \geq \sqrt{x^2 + 3x - 4}$

3. Ukažte, že funkce $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ je rostoucí, tedy prostá na R a najděte k funkci f na R funkci inverzní.

4. Dokažte, že pro všechna $a, b \in R$ platí $||a| - |b|| \leq |a - b|$.

5. Dokažte užitím matematické indukce:

a) pro $n \in N$ platí: $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.

nebo

b) pro $n \in N, n \geq 2$ platí: $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \sqrt{n}$.