MAI 2 - cvičení 2

I. Definice primitivní fce k fci na intervalu; množina všech primitivních funkcí k fci na intervalu; postačující podmínka pro existenci primitivní fce; je-li $F'(x)=f(x)$ na (a,b), pak F je spojitá v (a,b).

II. 1. „Tabulka" primitivních funkcí ($c\in R$)

($\int f(x)dx$ – označení pro množinu všech primitivních funkcí k f)

$\int x^{\alpha}dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+c$, $\alpha\neq-1$, $x\in(0,+\infty)$ (pro „některá" α i $x\in R$)

$\int \frac{1}{x}dx = \ln|x|+c$, $x\in(-\infty,0)$, $x\in(0,+\infty)$

$\int e^{x}dx = e^{x}+c$, $x\in R$

$\int \sin x\,dx = -\cos x+c$, $x\in R$

$\int \cos x\,dx = \sin x+c$, $x\in R$

$\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \operatorname{tg} x+c$, $x\in\left((2k-1)\frac{\pi}{2},(2k+1)\frac{\pi}{2}\right)$, $k\in Z$

$\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\operatorname{cotg} x+c$, $x\in(k\pi,(k+1)\pi)$, $k\in Z$

$\int \frac{1}{1+x^2}dx = \operatorname{arctg} x+c$, $x\in R$

$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x+c$, $x\in(-1,1)$

$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx = \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)+c$, $x\in R$

2. <u>Jednoduché příklady na výpočet primitivní funkce</u>
(užití tabulky a výpočet primitivní funkce k „násobku" funkce a k „součtu")

$\int \left(3e^x + \frac{1}{x}\right)dx$; $\int \left(\frac{1}{\cos^2 x} + 5\sqrt{x}\right)dx$; $\int \frac{x^3-1}{2x}\,dx$;

$\int \left(\sqrt[3]{x} + x^5\right)dx$; $\int \mathrm{tg}^2 u\,du$; $\int \frac{(1-v)^2}{v\sqrt{v}}\,dv$; $\int \frac{x^2}{x^2+1}\,dx$;

$\int \frac{x^4}{x^2+1}\,dx$;

3. <u>Je-li $\int f(x)dx = F(x) + C$, pak $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b)$, $a \neq 0$</u>
(na „odpovídajících" intervalech)

$\int e^{-x}dx$; $\int \cos(3x+1)\,dx$; $\int \frac{1}{5x-1}\,dx$; $\int \frac{1}{2-x}\,dx$;

$\int \frac{1}{(2x+1)^5}\,dx$; $\int 4^x\,dx$; $\int \frac{1}{4+x^2}\,dx$, $\int \frac{1}{1+4x^2}\,dx$;

$\int \frac{1}{x^2+2x+2}\,dx$; $\int \frac{1}{x^2+4x+7}\,dx$; $\int (3x-2)^6\,dx$;

$\int \sqrt[3]{1-3x}\,dx$; $\int \frac{1}{\sqrt{1-9x^2}}\,dx$; $\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$;

$\int \frac{1}{\sqrt{2+x-x^2}}\,dx$; $\int \frac{1}{\sqrt{4x-x^2}}\,dx$; $\int \frac{1}{\sqrt{1+9x^2}}\,dx$;

$\int \frac{1}{\sqrt{9+x^2}}\,dx$; $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-2x+2}}\,dx$; $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-2x+4}}\,dx$.

III. „Slepování" primitivních funkcí

$\int |x| dx$; $\int \sqrt{x^6}\, dx$; $\int |\sin x| dx$ v R ;

$\int f(x) dx$, kde $f(x)$ je def: 1) $f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ x, & x > 0 \end{cases}$

2) $f(x) = \begin{cases} x, & x < 0 \\ \sin x, & x \geqq 0 \end{cases}$

3) $f(x) = \begin{cases} x, & x < 0 \\ x^2, & x \geqq 0 \end{cases}$

IV. K dané funkci f na daném intervalu neexistuje fce primitivní:

$f(x) = \operatorname{sgn} x$, $x \in R$

$f(x) = \begin{cases} 2x, & x \leq 0 \\ 2x+1, & x > 0 \end{cases}$