MAI 2 – Cvičení 3

I. 1) Opakování definice primitivní fce k dané funkci na intervalu, základní vlastnosti primitivní fce, existence primitivní fce (viz cvičení 1)

2) Příklad funkce, která není spojitá na intervalu a má na tomto intervalu primitivní funkci:

$$f(x) = \begin{cases} 2x \sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}, \quad F(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

II. Výpočet primitivních funkcí

1) **substituční pravidlo I**: $g: (\alpha,\beta) \to (a,b)$, $g'(x) \in \mathbb{R}$ v (α,β), $F'(t) = f(t)$, $t \in (a,b)$, pak

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x)\,dx = F(g(x)) + C$$

Příklady: (najděte na max. možných intervalech primitivní fce):

$\int 2x e^{x^2} dx$; $\int 2x e^{-x^2} dx$; $\int x \cdot \sin(x^2) dx$; $\int x^2 \cos(x^3) dx$;

$\int x \sqrt{1-x^2}\, dx$; $\int \frac{1}{x^2} \sin\frac{1}{x}\, dx$; $\int \frac{1}{x^3} e^{\frac{1}{x^2}} dx$; $\int e^x \cos(e^x) dx$;

$\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$; $\int \frac{1}{\sqrt{\ln x}} \cdot \frac{1}{x} dx$; $\int \frac{x}{1+x^4} dx$; $\int \frac{\sqrt{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2} dx$;

$\int \frac{\cos x}{1+\sin^2 x} dx$; $\int \frac{\ln^2 x}{x} dx$; $\int \cos^3 x \cdot \sin x\, dx$; $\int \frac{3x^2}{\sqrt{x^3+3}} dx$;

$\int \sin^3 x\, dx$; $\int \frac{1}{\sin x} dx$ (podobně $\int \frac{1}{\cos x} dx$);

$\int \frac{\sin^3 x}{2+\cos x} dx$; $\int \frac{\ln x}{x(1+\ln^4 x)} dx$; $\int \frac{e^x}{e^{2x}+2e^x+2} dx$;

Spec.: $\displaystyle\int \frac{g'(x)}{g(x)}\,dx$: $\displaystyle\int \frac{x^3}{1+x^4}\,dx$; $\displaystyle\int \frac{1}{(1+\sqrt{x})\sqrt{x}}\,dx$;

$\displaystyle\int \operatorname{tg} x\,dx$; $\displaystyle\int \frac{1}{1+\operatorname{tg} x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}\,dx$; $\displaystyle\int \frac{\cos x}{2+\sin x}\,dx$; $\displaystyle\int \frac{x}{1+x^2}\,dx$;

$\displaystyle\int \frac{2x+4}{x^2+4x+5}\,dx$; $\displaystyle\int \frac{x-3}{x^2+4x+5}\,dx$; $\displaystyle\int \frac{e^{2x}+e^{x}}{e^{2x}+2e^{x}+2}\,dx$;

$\displaystyle\int \frac{\ln x}{1+\ln^2 x}\cdot\frac{1}{x}\,dx$

2) Substituční pravidlo II.

$G: (\alpha,\beta)\to R$ je na (α,β) primit. fce k fci $f(g(t))\,g'(t)$ a $g(\alpha,\beta)=(a,b)$ a $g'\neq 0$ na (α,β), pak na (a,b) je

$$\int f(x)\,dx = G(g^{-1}(x)) + c$$

Příklady: $\displaystyle\int \sqrt{1-x^2}\,dx$; $\displaystyle\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,dx$; $\displaystyle\int \frac{1}{x+2\sqrt{x}+2}\,dx$;

$\displaystyle\int \frac{1+\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg} x}\,dx$;

$\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$, substitujte $x=\sinh t$, kde $\sinh t = \dfrac{e^t-e^{-t}}{2}$

(Vyšetřete funkci $\sinh x = \dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$, a k ní inverzní funkci)

3) Integrace per partes

f', g' jsou spojité na (a,b), pak na (a,b) platí

$$\int f'(x)g(x)\,dx + \int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) + C \text{, neboli}$$

$$\int f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx$$

Příklady:

(i) $\int (x^2-x)e^{2x}\,dx$; $\int x\cdot\sin x\,dx$; $\int x^2\cos x\,dx$; $\int x^3\ln x\,dx$;

$\int x\ln^2 x\,dx$; $\int \frac{1}{x}\ln x\,dx$, $\int \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}\,dx$

(ii) $\int \ln x\,dx$

(iii) $\int \sin^2 x\,dx$ (stejně $\int \cos^2 x\,dx$) ; $\int e^x(\sin x+\cos x)\,dx$;

$\int \sqrt{1-x^2}\,dx$; $\int \sqrt{1+x^2}\,dx$; $\int \frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx$; $\int \frac{1}{(1+x^2)^n}\,dx$;

(iv) per partes a substituce:

$\int \operatorname{arctg} x\,dx$; $\int \arcsin x\,dx$; $\int e^{\sqrt{x}}\,dx$; $\int \operatorname{arctg}\sqrt{x}\,dx$;

$\int \ln(x+\sqrt{1+x^2})\,dx$; $\int \frac{x^2\operatorname{arctg} x}{1+x^2}\,dx$; $\int \arcsin^2 x\,dx$;

Dú: $\int \frac{\ln x}{x(1+\ln^4 x)^2}\,dx$; $\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$; $\int \arcsin^2 x\,dx$