MA I 2 – cvičení 4

I. Výpočet primitivní funkce pomocí substitučních pravidel I, II – viz příklady pro cvičení 2

II. Primitivní funkce k racionální funkci

1) Integrace parciálních (jednoduchých) zlomků:

$$\int \frac{2x+4}{x^2+4x+5}\,dx \;;\quad \int \frac{x-2}{x^2+4x+5}\,dx \;;\quad \int \frac{x-3}{x^2+4x+8}\,dx \;;$$

$$\int \frac{1}{(x^2+1)^n}\,dx \,,\; n\in\mathbb{N}, n>1 \;;\quad \int \frac{x-1}{(x^2+2x+2)^2}\,dx \;;\quad \int \frac{1}{(x^2+9)^3}\,dx \;;$$

Dú: (např.) $\int \frac{x+1}{(x^2-4x+5)^2}\,dx$.

2. Integrace racionální funkce

$$\int \frac{2x+3}{x^2+3x-10}\,dx \qquad \left(= \int \left(\frac{1}{x-2} + \frac{1}{x+5} \right) dx \right)$$

$$\int \frac{x^3+5x^2+15x+12}{x^2+3x+2}\,dx = \left(\int \left(x+2 + \frac{6}{x+2} + \frac{1}{x+1} \right) dx \right)$$

$$\int \frac{3x+9}{x^3+2x^2-x-2}\,dx = \left(\int \left(\frac{2}{x-1} - \frac{3}{x+1} + \frac{1}{x+2} \right) dx \right)$$

$$\int \frac{x}{x^4-3x^2+2}\,dx \qquad (\text{lze substituovat } x^2=t \text{ a pak rozložit})$$

$$\int \frac{3x^2+2x+2}{x^3-3x-2}\,dx \qquad \left(= \int \left(\frac{2}{x-2} + \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2} \right) dx \right)$$

$$\int \frac{dx}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{x+1} - \frac{x-1}{x^2+1}\right)dx$$

$$\int \frac{5x^2+2x+3}{x^3+x^2-2}\,dx = \int\left(\frac{2}{x-1} + \frac{3x+1}{x^2+2x+2}\right)dx$$

$$\int \frac{5x^2+x}{x^3-1}\,dx = \int\left(\frac{2}{x-1} + \frac{3x+2}{x^2+x+1}\right)dx$$

$$\int \frac{x^3-x-1}{(x^2+2)^2}\,dx = \int\left(\frac{x}{x^2+2} - \frac{3x+1}{(x^2+2)^2}\right)dx$$

DÚ: (např.) $\int \frac{8+6x-2x^2}{x^4-4x+3}$; $\int \frac{1}{x^4+1}\,dx$;

$\int \frac{7x+4}{(x+2)(x^2-x-6)}\,dx$;

III. Integrace funkcí pomocí vhodných substitucí, které vedou na integraci racionální funkce

1) $\int R(e^x)\,dx$ – substituce $e^x = t$ ($R(t)$ – rac. funkce v t)

$\int \frac{e^x}{e^{2x}+2e^x+2}\,dx$ ($\operatorname{arctg}(e^x+1) + C$, $x \in R$)

$\int \frac{1}{e^{2x}+2e^x+2}\,dx$ ($\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\ln(e^{2x}+2e^x+2) - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}(e^x+1) + C$, $x \in R$)

$\int \frac{dx}{e^{2x}+e^x-2}$ ($\frac{1}{6}\ln(e^x+2) + \frac{1}{3}\ln|e^x-1| - \frac{1}{2}x + C$) $x \in (-\infty, 0)$ a $x \in (0, +\infty)$)

$\int \frac{e^x-1}{e^x+1}\,dx$ ($2\ln(e^x+1) - x + C$, $x \in R$)

$$\int \frac{1}{(e^x+1)^2}\,dx \qquad \left(x + \frac{1}{e^x+1} - \ln(e^x+1) + c,\ x \in R \right)$$

DÚ (nepov.) $\displaystyle\int \frac{2e^{2x}-5}{e^{2x}+4e^x+5}\,dx$

b) $\displaystyle\int R(\ln x)\cdot\frac{1}{x}\,dx$ – substituce $\ln x = t$

$$\int \frac{\ln x}{(\ln^2 x+1)\cdot x}\,dx \qquad \left(\frac{1}{2}\ln(\ln^2 x+1) + c\ ;\ x \in (0,+\infty) \right)$$

$$\int \frac{\ln x}{x(\ln x-1)(\ln^2 x-2\ln x+2)}\,dx \qquad \left(\ln|\ln x-1| - \frac{1}{2}\ln(\ln^2 x-2\ln x+1) + \operatorname{arctg}(\ln x-1) + c \right)$$

$x \in (0,e)$, $x \in (e,+\infty)$

DÚ (nepov.): $\displaystyle\int \frac{\ln x+1}{(\ln^3 x+8)\cdot x}\,dx$, $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x(\ln^4 x+1)^2}\,dx$;

c) $\displaystyle\int R\left(x, \sqrt[s]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx$, $(s \in N, ad-bc \neq 0)$ – substituce $\displaystyle\sqrt[s]{\frac{ax+b}{cx+d}} = t$

$$\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,dx \qquad \left(2\sqrt{x} - 2\ln(1+\sqrt{x}) + c,\ x \in (0,+\infty) \right)$$

$$\int \frac{\sqrt{x}-1}{x(x-2\sqrt{x}+2)}\,dx \qquad \left(-\ln\sqrt{x} + \frac{1}{2}\ln(x-2\sqrt{x}+2) + \operatorname{arctg}\sqrt{x} + c \ \text{ na } (0,+\infty) \right)$$

$$\int \frac{1}{(\sqrt{x}+2)(x+6\sqrt{x}+10)}\,dx \qquad \left(-\ln(\sqrt{x}+2) + \ln(x+6\sqrt{x}+10) + 4\operatorname{arctg}(\sqrt{x}+3) + c \right.$$

$\left. \text{na } (0,+\infty) \right)$

$$\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx \qquad \left(\ln\left|\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}\right| + 2\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right) + c \right)$$

na $(-1,0)$ a $(0,1)$

a jednodušší příklad

$$\int \frac{1}{x^2}\sqrt{\frac{1+x}{x}}\,dx \qquad \left(-\frac{2}{3}\sqrt{\left(\frac{1+x}{x}\right)^3} + c \ \text{ na } (-\infty,-1) \text{ a } (0,+\infty) \right)$$

$$\int \frac{1}{x^2}\sqrt[3]{\frac{2x+1}{x+1}}\,dx \qquad \left(-\frac{t}{t^3-1}+\frac{1}{3}\ln|t-1|-\frac{1}{6}\ln|t^2+t+1|-\frac{1}{\sqrt3}\operatorname{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt3},\right.$$

(složitý příklad)

$$\left.\text{kde } t=\sqrt[3]{\frac{2x+1}{x+1}} \text{ na } (-\infty,-1),(-1,0),(0,+\infty)\right)$$

$$\int \frac{1+\sqrt[4]{x}}{x+\sqrt{x}}\,dx \qquad \left(4\sqrt[4]{x}+2\ln(1+\sqrt{x})-4\operatorname{arctg}\sqrt[4]{x}+C \text{ na } (0,+\infty)\right)$$

$$\int \frac{x^2+\sqrt{1+x}}{\sqrt[3]{1+x}}\,dx \qquad \left(6\sqrt[3]{(1+x)^2}\cdot\left(\frac{1}{16}(x+1)^2-\frac{1}{5}(x+1)+\frac{1}{7}\sqrt{x+1}+\frac{1}{4}\right)+C \text{ na } (-1,+\infty)\right)$$

$$\int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}\,dx \qquad \left(\frac{x^2}{2}-\frac{x\sqrt{x^2-1}}{2}+\frac{1}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)+C \text{ na } (1,+\infty)\right)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}\,dx \qquad \left(\frac{t^3}{3}-\frac{t^2}{2}+t-\ln|t+1|+C, \text{ kde } t=\sqrt[6]{x+1} \text{ na } (-1,+\infty)\right)$$

<u>DÚ</u> Spočítejte „tabulkový" integrál $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ také takto:

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int \frac{1}{x+1}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,dx \text{ na } (-1,1);$$

Jaký závěr musíte pak udělat ?