MAT 2 – cvičení – určitý integrál

I. Definice, věty o existenci a vlastnosti integrálů – integrály Riemannovy, Newtonovy, nevlastní Riemannovy

1. $\int_0^1 e^x dx$ – spočtěte z definice Riemann. integrálu
spočtěte jako Newtonův integrál

2. $\int_0^2 f(x)dx$, kde $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \langle 0,1\rangle \\ 2, & x \in (1,2\rangle \end{cases}$

(zobecněná přímková funkce)

3. $\int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$; $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$;

4. $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$; $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$; $\int_0^{\infty} \frac{2x}{1+x^2} dx$; $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2x}{1+x^2} dx$;

II. Vypočtěte určitého integrálu

$$\int_{-\sqrt{3}}^{1} \frac{1}{1+x^2} dx \; ; \quad \int_0^{2\pi} \cos^2 x dx \; ;$$

$$\int_0^1 x \operatorname{arctg} x \, dx \; ; \quad \int_1^e \ln^2 x dx \; ; \quad \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2-x^2} dx \; ; \quad \int_2^3 \frac{1}{x^2} \ln \frac{1}{x} dx \; ;$$

$$\int_0^2 \frac{x}{1+x^4} dx \; ; \quad \int_0^4 \frac{1}{1+\sqrt{x}} dx \; ; \quad \int_2^{1+\sqrt{3}} \frac{1}{x^2-2x+2} dx \; ;$$

$$\int_{2\sqrt{3}}^{3\sqrt{2}} \frac{1}{x\sqrt{x^2-9}} dx \; ; \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin x}{1+\cos x} dx \; ; \quad \int_0^1 \frac{1}{5x+2+3\sqrt{2+x-x^2}} dx$$

Da': $\int_{-\pi}^{7\pi} \frac{1}{2+\cos x}\,dx$; $\int_{0}^{\pi} \frac{1}{1+3\cos^2 x}\,dx$; $\int_{0}^{\frac{3}{2}} \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}}\,dx$;

Poza na vaših substituce a integrálů:

$\int_{-\pi}^{\pi} e^{\sin x}\cos x\,dx$; $\int_{0}^{\pi} \frac{1}{1+3\cos^2 x}\,dx$;

$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{(1+\cos x)^2}\cdot \sin\left(\frac{1}{1+\cos x}\right)\cdot \sin x\,dx$;

III. Vaše vlastnosti Riemannova integrálu

1.) $f \in R(-a,a)$; pak:

f liché $\Rightarrow$ $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$

f sudé $\Rightarrow$ $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$.

2.) $f \in R(0,p)$, $p>0$, f – p-periodická, pak pro $\forall a \in R$:

$$\int_{a}^{a+p} f(x)\,dx = \int_{0}^{p} f(x)\,dx .$$

3.) Je-li f spojitá a sudá v $\langle -a,a\rangle$, pak

$$\int_{-a}^{a} \frac{f(x)}{e^x+1}\,dx = \int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

4.) Je-li f spojitá v $\langle -a,a\rangle$ $(a>0)$ a lichá, pak primitivní funkce k f je v $(-a,a)$ sudá.

5) Spočtěte $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\int_0^x e^{t^2}dt}{x}$.

6) Bez výpočtu integrálu ukažte, že

$$\int_{-1}^{2}(e^{x}-e^{-x})dx>0 \quad ; \quad \int_{\frac{1}{a}}^{a}\frac{\ln x}{x}dx=0 \quad (a>0).$$

Aplikace Riemannova integrálu

1. Spočtěte obsah kruhu, elipsy.
2. Spočtěte obsah rovinné oblasti ω, kde
$$\omega = \{[x,y]; 0\le x\le 1 \; ; \; 0\le y\le \operatorname{arcotg}\sqrt{x}\};$$
3. Spočtěte obsah omezené rovinné oblasti, které je ohraničené grafy funkcí $y=x$, $y=\frac{4}{x}$ a přímkou $x=1$.
4. Spočtěte obsah omezené rovinné oblasti, které je ohraničené grafem funkce $y=\ln x$, tečnou k tomuto grafu v bodě $[1,0]$ a přímkou $x=e$.
5. Spočtěte objem koule a rotačního elipsoidu.
6. Spočtěte objem rotačního tělesa, které vznikne rotací rovinné oblasti ω kolem osy x, když
(i) $\omega = \{[x,y]; 0\le x\le v, \; 0\le y\le c\sqrt{x}, \; v>0, \; c>0\}$
(ii) $\omega = \{[x,y]; 0\le x\le \pi; \; 0\le y\le \sin x\}$
(iii) $\omega = \{[x,y]; 0\le x\le 1; \; 0\le y\le \arcsin x\}$

7. Sestrojte délku kružnice o poloměru $r > 0$.

8. Sestrojte délku grafu funkce $y = \frac{x^2}{2}$; $x \in \langle 0, 1 \rangle$.

9. Sestrojte délku grafu funkce $y = \ln \cos x$, $0 < x \leq \frac{\pi}{6}$.

10. Ukažte, že označíme-li S obsah rotační plochy, která vznikne rotací grafu funkce $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, kolem osy x (f, f' spojité v $\langle a, b \rangle$ nebo spojité v $\langle a, b \rangle - K$, K - konečná množina), je

$$S = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx.$$

11. Zkonstruujte vzorce pro povrch koule a plášť koule.