MA2 – „písemná" přednáška 20. 5. 2020

Minulá přednáška byla věnována základním poznatkům o nekonečných číselných řadách. Definovali jsme pojmy – řada konvergentní, divergentní, absolutně konvergentní řada, a probrali jsme několik základních kritérií konvergence číselných řad. A mezi příklady vyšetřování konvergence řad byly řady

$$\sum_{0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad \sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}, \quad \sum_{0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}, \quad \sum_{1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2},$$

kde členy řad jsou funkce (zde definované v R). A také už v Matematice A1, v souvislosti s Taylorovými polynomy funkce (důležitými aplikacemi derivací funkce), jsme si uvedli t. zv. Taylorovy řady (ež byly limity Taylorova polynomu stupně n pro $n \to \infty$): pro $x \in R$ je

$$e^x = \sum_{0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}; \quad \sin x = \sum_{0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}; \quad \cos x = \sum_{0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

<u>Řady $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$</u>, kde členy řady jsou funkce $f_n(x)$, se nazývají <u>funkční řady (nebo řady funkcí)</u>, a množina bodů $x \in R$, kde řada $\sum_{1}^{\infty} f_n(x)$ konverguje (jako řada čísel), se nazývá <u>obor konvergence této řady.</u>

Kromě řady $\sum_{1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$, která „patří" mezi t. zv. řady trigonometrické, jsou uvedené řady t. zv. řady mocninné (jakoby „nekonečné" polynomy), obecně mocninná řada je tvaru $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$, $a_n \in R$, $x_0 \in R$.

Obory konvergence uvedených řad funkcí:

řady $\sum_0^\infty \frac{x^n}{n!}$, $\sum_0^\infty (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $\sum_0^\infty (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ mají

obor konvergence celé R (první z nich jsme vyšetřili jako cvičení na absolutní konvergenci číselných řad);

řada $\sum_1^\infty (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$ konverguje v $(-1,1\rangle$;

obor konvergence řady $\sum_0^\infty (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ je interval $\langle -1,1\rangle$;

obor konvergence řad $\sum_1^\infty \frac{\sin nx}{n^2}$ je opět R.

Funkční řady jsou velmi užitečné i v aplikacích matematiky, pokud $f(x) = \sum_1^\infty f_n(x)$ v oboru konvergence, lze pomocí částečných součtů řady aproximovat uvažovanou funkci, když např. víme, že $e^x = \sum_0^\infty \frac{x^n}{n!}$, máme nové „vyjádření" základní elementární funkce e^x, a takolo vyjádření pomocí mocninné, spec. Taylorovy řady, lze využít mnoha způsoby, k aproximaci hodnot, i k důkazům vlastností exponenciely.

Konvergenci nekonečných řad funkcí, tj. nalezení oboru konvergence funkční řady, lze vyšetřit pomocí výsledků teorie řad číselných (také trochu uvidíme), ale u funkčních řad se objevují jiné další problémy – souvislost mezi vlastnostmi členů řady $\sum_1^\infty f_n(x)$, tj. vlastnostmi funkcí $f_n(x)$, $n = 1, 2, \dots$ a vlastnostmi součtu řady.

Problémy u nekonečných řad funkcí jsou například tyto (a jejich řešení je dost důležité v učivu funkčních řad):

jsou-li $f_n(x)$ funkce spojité v (a,b), $n=1,2,\dots$, a $\sum_1^\infty f_n(x)$ v (a,b) konverguje, zda součet řady fce $f(x)=\sum_1^\infty f_n(x)$ je také v (a,b) spojitá – tedy je zde otázka, zda limita posloupnosti spojitých funkcí, tj. limita posloupnosti $\{S_N(x)\}_{N=1}^\infty$, kde $S_N(x)=\sum_1^N f_n(x)$, je funkce spojitá, a podobné otázky – – zda „nekonečný součet", tj. řada funkcí, mají-li derivaci, má též derivaci (a navíc, zda a tedy platí, že „derivace řady" je „řada derivací" – tj. tedy platí „zobecněné" pravidla o derivování součtu na „součet „nekonečně" mnoha funkcí", a obdobné otázky lze položit i v souvislosti s existencí a výpočtem primitivní funkce i určitého integrálu. A ukazuje se, že ne vždy má řada (tj. „součet nekonečně mnoha funkcí") stejné vlastnosti, jako mají členy uvažované funkční řady. A v teorii funkčních řad se pak formulují podmínky, za kterých se vlastnosti $\{f_n(x)\}_1^\infty$ „přenášejí" i na $f(x)=\sum_1^\infty f_n(x)$.

A toto není jednoduché (až na výjimky), vzniká v této teorii řada nových důležitých pojmů, týkajících se konvergence, ale to „přesahuje" naši Matematiku A2 (někdy probíráme ve „Vybraných partiích z matematiky").

Ukažme si jednoduchý příklad:

Uvažujme posloupnost $\{g_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, $g_n(x) = x^n$, $x \in \langle 0,1\rangle$.

Pak, pro $x \in \langle 0,1)$ je $\lim_{n\to\infty} g_n(x) = \lim_{n\to\infty} x^n = 0$, ale

pro $x = 1$ je $\lim_{n\to\infty} g_n(1) = \lim_{n\to\infty} 1 = 1$,

tedy limita jednoduché " posloupnosti funkcí, spojitých na intervalu $\langle 0,1\rangle$ je funkce nespojitá v $\langle 0,1\rangle$, limita není spojitá v bodě 1 zleva, na intervalu $\langle 0,1)$ limita naopak spojitá je.

A proč je fce $g(x) = \lim_{n\to\infty} g_n(x)$ nespojitá v bodě 1 zleva, a kdy bude limita posloupnosti spojitých funkcí na $M \subset R$ spojitá na M? Takových otázek a problémů je v teorii funkčních řad hodně, my zde uvedeme vlastnosti mocninných řad, které mají vlastnosti „dobré":

Věta (o oboru konvergence)

Mějme mocninnou řadu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)$, $x_0 \in R$, $a_n \in R$ pro $n=1,2\ldots$.

Pak tato řada konverguje jen v bodě $x = x_0$, nebo konverguje pro všechna $x \in R$, nebo existuje číslo $r>0$ tak, že řada konverguje absolutně v intervalu (x_0-r, x_0+r) a diverguje pro $|x-x_0| > r$, tj. pro $x \in (-\infty, x_0-r) \cup (x_0+r, +\infty)$.

Číslo $r>0$ se nazývá poloměr konvergence řady $\sum_0^{\infty} a_n(x-x_0)^n$.

A v našich příkladech:

$\sum_0^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ $(x_0=0)$ konverguje v R (někdy se říká, že $r=\infty$);

$\sum_0^{\infty} n!\,x^n$ konverguje jen v bodě $x_0=0$ (někdy " $r=0$) (zde, u mocninných řad, znamená " $0^0 = 1$);

$\sum_{1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$ konverguje v intervalu $(-1,1\rangle$, tedy $r=1$;

$\sum_{0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ konverguje v intervalu $\langle -1,1\rangle$, tedy opět $r=1$.

A vidíme (poznámka k větě), že v bodech x, pro které je $|x-x_0| = r$, tj. pro $x = x_0+r$ a $x = x_0-r$, věta nic „neříká", řada může v těchto bodech konvergovat, nebo divergovat.

A vlastnosti mocninných řad jsou shrnuty v následující větě:

Věta (vlastnosti mocninných řad)

Nechť mocninná řada $\sum_{0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ má poloměr konvergence $r>0$ nebo $r=+\infty$. Pak platí (označme $\sum_{0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = f(x)$ v oboru konvergence):

1) $f(x)$ je funkce spojitá v oboru konvergence;

2) v intervalu (x_0-r, x_0+r) má funkce f derivace všech řádů a platí $\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-x_0)^{n-1}$;

řada „derivací" $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-x_0)^{n-1}$ má stejný poloměr konvergence jako řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$;

(říkáme, že mocninnou řadu můžeme derivovat „člen po členu", pravidlo o derivaci součtu lze pro mocninné řady „rozšířit", i na nekonečné součty – tj. $\left(\sum_{0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty}\left(a_n(x-x_0)^n\right)'$)

3) řada $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-x_0)^{n+1}$ má stejný poloměr konvergence jako řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ a platí (integrace „člen po členu")

$$\int \left(\sum_{0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n\right)dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-x_0)^{n+1} + C,$$

a také pro určitý integrál platí (součet je funkce spojitá v oboru konvergence): je-li $\langle a,b\rangle \subset (x_0-r, x_0+r)$, pak

$$\int_a^b \left(\sum_{0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n\right)dx = \sum_{0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}\left[x^{n+1}\right]_a^b ;$$

4) Je-li $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-x_0)$ v okolí $U(x_0)$,

pak $a_n = b_n$ pro všechna $n=1,2,\dots$ (analogie vlastnosti polynomů)

A ještě jedna „pěkná" vlastnost mocninných řad:

Věta: Je-li $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)$ v okolí $U(x_0,\delta)$, pak

$a_n = \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$, tedy, mocninná řada je Taylorovou řadou funkce f (o středu $x_0\in R$).

Říká se, že mocninná řada je v tomto případě, tj. když $r>0$ nebo $r=+\infty$, Taylorovou řadou svého součtu.

Ukažme si dále několik příkladů užití mocninných řad a jak je lze někdy sečíst.

Příklad 1

V minulé přednášce bylo poznamenáno, že $\sum_1^\infty (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} = \ln(x+1)$ v intervalu $(-1,1\rangle$, a odtud pro $x=1$: $\sum_1^\infty \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2$.

Konvergenci řady jsme v přednášce uměli "vyšetřit", ukažme si, jak se dá uvažovaná řada „sečíst":

1) uvažme derivaci: $(\ln(x+1))' = \frac{1}{1+x}$ v $(-1,+\infty)$

2) $\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = \sum_0^\infty (-x)^n$ – součet geometrické řady s kvocientem $q=-x$,

řada konverguje pro $x \in (-1,1)$

3) mocninnou řadu (dle věty) lze v $(-1,1)$ integrovat „člen po členu", tj.

$$\int \frac{1}{1+x}\,dx = \sum_0^\infty (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + C_1 \quad \text{a též}$$

$$\int \frac{1}{1+x}\,dx = \ln(x+1) + C_2 \quad v\ (-1,1),$$

tedy, $\ln(x+1) = \sum_0^\infty (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ v $(-1,1)$

a zvolíme-li $x=0$, pak $\ln 1 = C = 0$, tj. (místo $n+1$ píšeme n, $n=1,2\dots$)

$$\ln(x+1) = \sum_{n=1}^\infty (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} \quad v\ (-1,1) \qquad (*)$$

4) dle vlastností mocninných řad (1, ve větě) je součet řady funkce spojitá v $(-1,1\rangle$ (tj. v oboru konvergence), a protože je spojitá i funkce $\ln(x+1)$ v bodě $x=1$, platí rovnost $(*)$ i v bodě $x=1$, tj. $\ln 2 = \sum \frac{(-1)^{n-1}}{n}$.

Příklad 2

Podobně, jako v příkladu 1, lze ukázat, že platí

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad v \ \langle -1, 1 \rangle \ !$$

1) $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$ v R

2) $\dfrac{1}{1+x^2} = \dfrac{1}{1-(-x^2)} = \sum\limits_0^{\infty} (-x^2)^n = \sum\limits_0^{\infty} (-1)^n x^{2n}$ v $(-1,1)$

(geometrická řada s kvocientem $q = -x^2$, konverguje v $(-1,1)$)

3) řadu v 2) lze v $(-1,1)$ integrovat „člen po členu", tedy

$$\operatorname{arctg} x = \int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \sum_0^{\infty} (-1)^n \int x^{2n}\,dx = \sum_0^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + c$$

pro $x \in (-1,1)$

a „nalezneme" konstantu c arctg $= $ ... „c = 0":

$c = 0$: $\quad \operatorname{arctg} 0 = 0 = 0 + c \rightarrow c = 0$,

tedy v $(-1,1)$ je $\underline{\operatorname{arctg} x = \sum\limits_0^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}}$

4) a opět, díky spojitosti součtu řady $\sum\limits_0^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}$ v oboru konvergence, tj. v intervalu $\langle -1, 1 \rangle$ (a spojitosti fce arctg x) platí:

$$\underline{\operatorname{arctg} x = \sum_0^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad v \ \langle -1, 1 \rangle}$$

5) a pro $x = 1$: (dostaneme)

$$\frac{\pi}{4} = \sum_0^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1}, \text{ tj.}$$

$$\pi = 4 \sum_0^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

A mocninné řady lze užít pro vyjádření primitivních funkcí, které nelze vyjádřit pomocí elementárních funkcí (např. primitivní funkce k $f(x) = e^{-x^2}$, nebo k $f(x) = \frac{\sin x}{x}$), i k vyjádření určitých integrálů:

<u>Příklad 3</u> – <u>primitivní funkce k funkci $f(x) = e^{-x^2}$ v R</u>

v R je $e^{-x^2} = \sum\limits_0^\infty \frac{(-x^2)^n}{n!} = \sum \frac{(-1)^n}{n!} x^{2n}$, tedy

v R lze (dle věty, část 3) vyjádřit primitivní funkci:

$$\underline{\int e^{-x^2} dx} = \int \left(\sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{n!} x^{2n} \right) dx = \sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{n!} \int x^{2n} dx =$$

$$\underline{= \sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{n!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + c} \quad \text{(opět integrací člen po členu)}$$

<u>Příklad 4</u> – <u>primitivní funkce k $f(x) = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \end{cases}$ v R:</u>

$f(x) = \sum\limits_0^\infty (-1)^{k-1} \frac{x^{2k}}{(2k+1)!}$ konverguje v R, tedy (je to opět řada mocninná) lze integrovat „člen po členu" touto mocninnou řadou v R, a pak

$$\underline{\int f(x) dx} = \int \left(\sum_0^\infty (-1)^{k-1} \frac{x^{2k}}{(2k+1)!} \right) dx = \underline{\sum_0^\infty \frac{(-1)^{k-1}}{(2k+1)!(2k+1)} \cdot x^{2k+1} + C},$$

$x \in R$

Příklad 5 a protože známe primitivní funkci k $f(x)$ z příkladu 4 v R, umíme též vyjádřit

$$\underline{\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,dx} = \sum_0^\infty \frac{(-1)^{k-1}}{(2k+1)!\,(2k+1)} \left[x^{2k+1}\right]_0^1 = \underline{\sum_0^\infty \frac{(-1)^{k-1}}{(2k+1)!\,(2k+1)}} =$$

$$= 1 - \frac{1}{3\cdot 3!} + \frac{1}{5\cdot 5!} - \frac{1}{7\cdot 7!} + \dots$$

A ještě několik poznámek:

1) Pokud bychom použili rovnost $\ln 2 = \sum_1^\infty \frac{(-1)^n}{n}$ k výpočtu hodnoty $\ln 2$ tak, že použijeme jako aproximaci částečný součet nekonečné řady, pak lze u alternujících řad i odhadnout, jak velikou „chybu" uděláme:

Věta: Je-li dána řada $\sum_{n=1}^\infty (-1)^{n-1} a_n$, $a_n \geq 0$, $n = 1, 2 \dots$, $\{a_n\}$ je klesající posloupnost a $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, pak, označíme-li

$$R_k = \sum_{n=k+1}^\infty (-1)^n a_n \,, \text{ je } |R_k| \leq a_{k+1} .$$

2) V matematice A1 jsme si odvodili, že platí

$$e^x = \sum_0^\infty \frac{x^n}{n!} \,,$$ a zde jsme jistě ukázali i pomocí kritérií konvergence, že řada konverguje v R;

ukázali jsme to pomocí Taylorova vzorce:

$$e^x = \sum_0^N \frac{x^n}{n!} + R_N(x) \,, \text{ kde } R_N(x) \to 0 \text{ pro } N \to \infty$$
$$(\text{a lib. } x \in R)$$

A pouze vyjádření exponenciely mocninnou (Taylorovou) řadou v R se rozšíří exponenciela i do komplexního oboru – do $\mathbb{C}$:
pro $z \in C$ definujeme $e^z = \sum_0^\infty \frac{z^n}{n!}$, tato řada konverguje pro všechna $z \in C$ (neboť vhodně rozšíříme pojem konvergence řady i na řady čísel komplexních). A speciálně, je-li $z = ix$, $x \in R$, dostaneme námi (z diferenciálních rovnic) známý vztah:

$$\underline{e^{ix} = \cos x + i \sin x, \quad x \in R} \; :$$

$$e^{ix} = \sum_{n=0}^\infty \frac{(ix)^n}{n!} = \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} + i \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}, \text{ tj.}$$

$$\underline{e^{ix} = \cos x + i \sin x, \quad x \in R}$$

A úplně poslední poznámka (v „matematice A2")

Mezi příklady, které jsme si uvedli, byla i řada $\sum_1^\infty \frac{\sin nx}{n^2}$, konvergentní v R, která „patří" mezi tzv. trigonometrické řady, jejichž obecný tvar je $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^\infty (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$.

Vyšetřování konvergence a vlastností trigonometrických řad je dost obtížnější než u těch „pěkné vlastnosti" majících řad mocninných. Trigonometrické funkce slouží k vyjádření 2π periodických funkcí (v našem tvaru, ale jsou i tvary řad pro obecnou periodu), ale součet trigonometrické řady už není obecně funkce spojitá, nebo taková, že má všude derivace, i když členy řady jsou nekonečně derivovatelné.

Mezi trigonometrické řady patří i speciální řady, t.zv. řady Fourierovy, které lze definovat pro funkce f, 2π periodické a $f \in R(\langle -\pi, \pi \rangle)$ (tedy pro funkce Riemannovsky integrovatelné v $\langle -\pi, \pi \rangle$, a tedy

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx \quad , \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx \, .$$

Fourierovy řady jsou velmi užitečným nástrojem pro vyšetřování periodických dějů v aplikacích, je jim věnováno hodně literatury. Trochu je též probíráme ve „Vybraných partiích", zpravidla v druhé části zimního semestru.

<u>Základní výsledek pro Fourierovy řady</u> (pro „nás") by mohl být:

Pokud f je 2π periodická funkce (def. v R), ~~s~~ spojitá, a po částech hladká (tj. v intervalu $\langle -\pi, \pi \rangle$ existuje jen konečně mnoho bodů, kde funkce f nemá derivaci, ale v těchto bodech má f' jednostranné limity konečné (tedy ve špičkách není svislá tečna), pak její Fourierova řada konverguje v R a platí

$$\underline{f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum (a_n \cos nx + b_n \sin nx)} \quad , \; x \in R$$

Dále je známo, že pro $f \in R(\langle -\pi, \pi \rangle)$ platí:
jsou-li a_n, b_n Fourierovy koeficienty fce f, pak $\sum_{1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$ konverguje.

Pro zajímavost, uveďme si několik příkladů Fourierových řad:

1) $f(x)$ je 2π-periodická funkce, $f(x) = |x|$ pro $x \in \langle -\pi, \pi \rangle$;

f je spojitá, po částech hladká, a platí:

pro $x \in \langle -\pi, \pi \rangle$ je $\quad |x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}$,

a odtud, vhodnou volbou x, se získá: $\quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.

2) $f(x)$ je 2π-periodická funkce, $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \langle -\pi, 0) \\ \sin x, & x \in \langle 0, \pi) \end{cases}$

opět, f je spojitá funkce v R, po částech hladká, a platí

$$f(x) = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\sin x - \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2kx}{(2k-1)(2k+1)}, \quad x \in \langle -\pi, \pi \rangle$$

3) $f(x)$ je 2π-periodická funkce, $f(x) = x$ pro $x \in \langle 0, 2\pi)$

f už není spojitá v R, není spojitá v bodech $2k\pi$, $k \in Z$;

a pak je $\quad f(x) = \pi - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$, $\quad x \in (0, 2\pi)$

a součet Fourierovy řady v bodech $2k\pi$ je $\phi(2k\pi) = \pi$,

což je $\quad \dfrac{\lim\limits_{x \to 2\pi-} f(x) + f(2\pi)}{2}$.

(zase je známo – důležitý výsledek v teorii Fourierových řad)