Cvičení MAI 1 – nekonečné číselné řady

I. („početní" příklady)

1. Pokuste se sečíst řadu nebo ukažte, že řada diverguje:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_{n+1}-a_n),\ \text{ex.-li}\ \lim_{n\to\infty}a_n=a\in\mathbb{R};\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n-2^{n+1}}{6^n};$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}e^{-3k};\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}$$ (oba příklady rozkladem na „jednodušší" zlomky);

$$\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right);\quad \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right).$$

2. Rozhodněte o konvergenci či divergenci řady:
(užijte vhodné kritérium)

(i) $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p},\ p\geq 2;\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p},\ p\leq 1;\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2-n+1};$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2n^2+3};\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2n^2+3};\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n^2+3};$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{n^3+1};\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n^2-1};\quad \sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n^2};\quad \sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n};$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cdot\sin\frac{1}{n};\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{\frac{1}{n}}}{n^2};\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^4+3}};\quad \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+n}{1+n^2}\right)^2;$$

(ii) $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 4^n};\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3^n};\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n!};\quad \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^n,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+2}{3n+1}\right)^n;\quad \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+n}{1+n^2}\right)^n;\quad \sum_{n=1}^{\infty}n^2\cdot\sin\frac{\pi}{2^n};\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n};$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot(\sin 1)^n;\quad \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt[n]{n}-1\right)^n;$$

(iii) Pro jaká $a>0$ konvergují řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{1+a^n} \quad \text{nebo} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+a^n} \quad ?$$

3. <u>Vyšetřete absolutní, případně neabsolutní konvergenci řady:</u>

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{n} \;;\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} \;;\quad \sum \frac{(-1)^{n-1}}{\ln(n+1)} \;;\quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{n}{n^2+1} \;;$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \;;\quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \sin\frac{1}{n} \;;\quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \sin\frac{1}{n^2} \;;$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n^2+1} \;;\quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{\sin\frac{\pi}{n}}{n} \;;\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}} \;;$$

4. <u>Vyšetřete absolutní, případně neabsolutní konvergenci řady v závislosti na parametru $a \in R$:</u>

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} \;;\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n \cdot 3^n} \;;\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n} \;;\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a+2)^n}{n+1} \;;$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(a-3)^n} \;;\quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{a^{2n+1}}{2n+1} \;;\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3+1} (a+1)^n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n \cdot n!}{n^n}$$

II.

1) Ukažte, že platí:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \text{ a } \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 \text{ konvergují} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot b_n \text{ konverguje absolutně}$$

2) Označme-li $R_k = \sum_{n=k+1}^{\infty} a_n$, ukažte, že platí:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konverguje} \Rightarrow \lim_{k\to\infty} R_k = 0.$$

3) Mějme $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$, kde $a_n \geq a_{n+1}$ pro všechna $n \in N$ a $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ (tedy daná řada konverguje).
Ukažte, že $|R_k| \leq |a_{k+1}|$, $k \in N$.

4) Odhadněte $|R_k|$ pro řadu $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!}$.

5) Ukažte, že alternující řada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n =$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}-1} - \frac{1}{\sqrt{3}+1} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}-1} - \frac{1}{\sqrt{n}+1} + \dots$$

diverguje, i když $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

6) Vyšetřete konvergenci alternující řady

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+(-1)^n}.$$