Diferenciální rovnice 1. řádu se separovanými proměnnými

$$\begin{aligned} &(1) \quad \begin{cases} y' = f(x)\,g(y) \\ y(x_0) = y_0 \qquad \text{(počáteční podmínka)} \end{cases} \\ &(2) \end{aligned}$$

kde f je fce spojitá na (a,b), g spojitá na (c,d), $x_0 \in (a,b)$, $y_0 \in (c,d)$

Formální způsob řešení

1) $g(y) \neq 0$ v (c,d): (tak, napíšeme-li $y' = \frac{dy}{dx}$):

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)\,dx$$

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)\,dx \qquad \text{(integrály existují díky spojitosti } f \text{ a } g \text{ (a } g(y)\neq 0))$$

$$G(y) = F(x) + C$$

$$(3) \qquad \underline{y(x) = G^{-1}(F(x)+C)}$$

Poznámky:

(1) $G'(y) = \frac{1}{g(y)} \neq 0$ a spojitá fce, tedy $G'(y) > 0$ nebo $G'(y) < 0$ v (c,d), $G(y)$ je tedy v (c,d) ryze monotónní a inverzní fce G^{-1} existuje

(2) C není obecně libovolná konstanta, ale taková, aby definiční obor fce $G^{-1}(F(x)+C))$ byl nedegenerovaný

(3) návod je formální, ale lze se přesvědčit, že funkce (3) je řešením dané diferenciální rovnice na části (a,b)

(4) Že integrál $\int \frac{dy}{g(y)}$ na levé straně se dosazeně,

pokud je $y(x)$ řešení, takto: po separaci je

$$\int \frac{y'(x)}{g(y(x))}\,dx = \left| \begin{matrix} y(x) = y \\ y'(x)dx = dy \end{matrix} \right| = \int \frac{dy}{g(y)} \Big|_{y=y(x)}$$
(substituce)

2) pokud $g(\bar{y}_0)=0$, pak i funkce $y(x)=\bar{y}_0$ je řešení rovnice (1) (konstantní, neboli také se nazývá stacionární)

3) u některých typů rovnic mohou ještě být řešení, která vzniknou „lepením" řešení z 1) a řešení stacionárního

<u>Řešení počáteční úlohy:</u>

hledáme řešení, pro které je $y(x_0)=y_0$, $x_0\in(a,b)$, $y_0\in(c,d)$:

tj. $G(y_0)=F(x_0)+C$

a odtud $C=G(y_0)-F(x_0)$,

tedy řešení je: buď $\underline{y(x)=y_0}$ (pokud $g(y_0)=0$), $x\in(a,b)$

nebo $\underline{y(x)=G^{-1}(F(x)+G(y_0)-F(x_0))}$, (na nějakém intervalu $(\alpha,\beta)\subset(a,b)$.)

je-li $g(y_0)\neq 0$.

<u>Ukázka řešení:</u>

<u>Příklad 1:</u> (z domácího úkolu 3) $\underline{y'+\frac{x}{y}=0}$:

rovnici napíšeme ve tvaru $\underline{y'=-\frac{x}{y}}$,

kde $x\in R$ a $y\in(-\infty,0)$ nebo $y\in(0,+\infty)$, a separujeme:

$$\int y\,dy=\int -x\,dx$$

$$y^2=-x^2+C$$

$$\underline{x^2+y^2=C} \qquad (*)$$

<u>Odtud je vidět</u>: 1) C lze volit jen kladné

2) $y(x) = \sqrt{c-x^2}$, $x \in (-\sqrt{c}, \sqrt{c})$

nebo $y(x) = -\sqrt{c-x^2}$, $x \in (-\sqrt{c}, \sqrt{c})$

(vyhovuje $+\sqrt{c-x^2}$ nebo $-\sqrt{c-x^2}$ je dáno počáteční podmínkou)

Řešení počáteční úlohy:

1) ? $\underline{y(1)=3}$: $c = 3^2 + 1^2 = 10$,
$y(1) = 3 > 0$, tedy řešení je

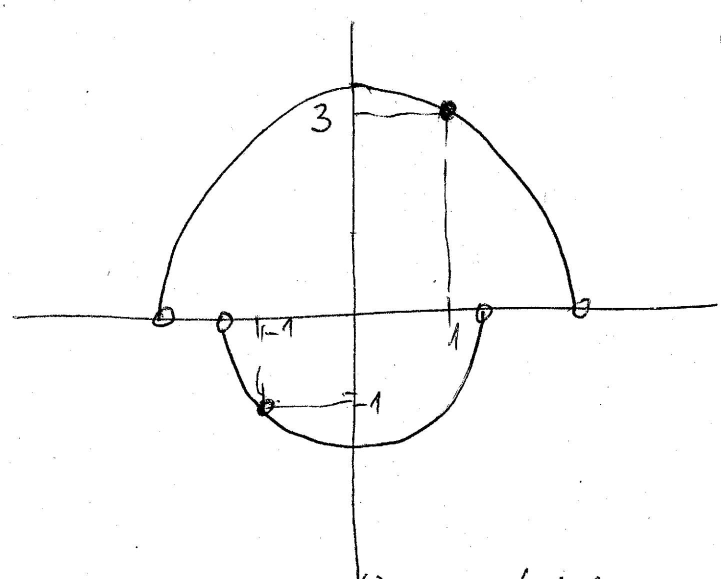
$$\underline{y(x) = +\sqrt{10-x^2}, \quad x \in (-\sqrt{10}, \sqrt{10})}$$

2) $y(-1) = -1$: $c = (-1)^2 + (-1)^2 = 2$
$y(-1) = -1 < 0$, tedy,

$$\underline{y(x) = -\sqrt{2-x^2}, \quad x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})}$$

Integrální křivky (grafy řešení):

(polokružnice o středu v počátku)



Triviální (stacionární) řešení tato rovnice nemá!

Příklad 2: $\quad y' = \dfrac{2(1-y)}{1+x}$

s počátečními podmínkami: (i) $y(0)=0$, (ii) $y(0)=1$, (iii) $y(-2)=3$

$f(x) = \dfrac{1}{1+x}$ je spojitá na $(-\infty,-1)$ a $(-1,+\infty)$,

$g(y) = 1-y$ je spojitá v $\mathbb{R}$, $g(y)=0 \Leftrightarrow y=1$

1) $y(x)=1$, $x\in(-\infty,-1)$, $x\in(-1,+\infty)$ je stacionární řešení!

2) $g(y)\neq 0$ $(y(x)\neq 1)$ lze provést separaci proměnných:

$$\int \frac{dy}{1-y} = \int \frac{2}{1+x}\,dx$$

$$-\ln|1-y| = 2\ln|1+x| + C$$

$$\ln|y-1| = \ln\frac{e^C}{(1+x)^2}, \quad \text{odkud}$$

$$|y-1| = \frac{e^C}{(1+x)^2} \quad \text{a pak } (y-1\neq 0 \text{ a spojitá funkce})$$

$$y(x) = 1 + \frac{K}{(1+x)^2}, \quad K\neq 0 \ (K=\pm e^C),$$
$x\in(-\infty,-1)$ nebo $x\in(-1,+\infty)$

Počáteční úloha:

(i) $y(0)=0$:

$0 = 1 + \frac{K}{1} \Rightarrow K=-1$

$y(x) = 1 - \dfrac{1}{(1+x)^2}$, $x\in(-1,+\infty)$

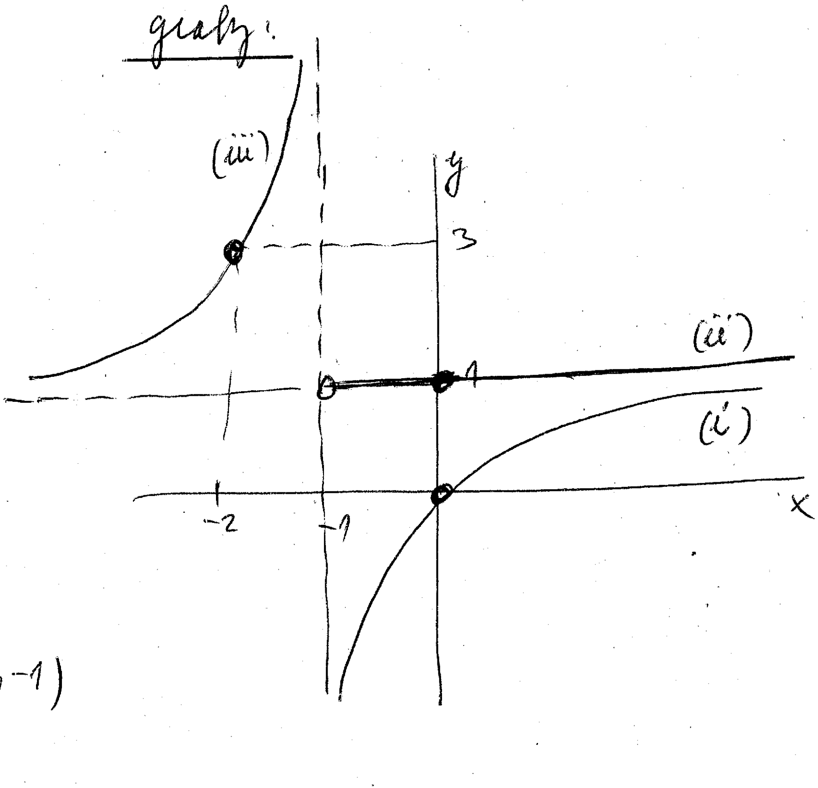
(ii) $y(0)=1$ $\quad y(x)=1$, $x\in(-1,+\infty)$ (stac. řešení)

(iii) $y(-2)=3$

$3 = 1 + \dfrac{K}{(1-2)^2} \Rightarrow K=2$

$y(x) = 1 + \dfrac{2}{(1+x)^2}$, $x\in(-\infty,-1)$

grafy:



Lineární diferenciální rovnice 1. řádu

$$(1) \qquad \underline{y' + p(x)y = f(x)} \,,$$

kde $p(x)$ a $f(x)$ jsou funkce spojité na intervalu (a,b)

<u>Věta</u>: Každým bodem $(x,y) \in (a,b) \times \mathbb{R}$ prochází jediné jedno řešení rovnice (1) a jeho definičním oborem je interval (a,b).

Řešení hledáme metodou variace konstant

1) <u>položme $f(x)=0$ a rovnici $y' + p(x)y = 0$</u> (homogenní r.)
<u>řešme separací proměnných</u>:
buď je $y(x)=0$, $x \in (a,b)$, nebo (pro $y(x) \neq 0$)
dostaneme:

$$\int \frac{dy}{y} = -\int p(x)\,dx$$

$$\ln|y| = -\int p(x)\,dx \quad (= P(x) + C \quad P\text{– je primit. k } p \text{ na } (a,b))$$

$$y = K \cdot e^{-P(x)} \,, \quad K \neq 0,\ x \in (a,b)$$

a tedy obecné řešení: $y_H = K e^{-P(x)}$, $K \in \mathbb{R}$, $x \in (a,b)$
(„podobné" nebo „celé" řešení)

2) <u>řešení nehomogenní rovnice dostaneme metodou variace konstant</u>:

řešení hledáme ve tvaru

$$\underline{y(x) = K(x)\,e^{-P(x)}} \,,$$

kde $K(x)$ je třeba najít tak, aby $y(x) = K(x)e^{-P(x)}$ bylo řešení rovnice (1), tedy, aby platilo (dosazení do (1))

$$\left(K(x)e^{-P(x)}\right)' + p(x)K(x)e^{-P(x)} = f(x)$$

odtud:

$$K'(x)\,e^{-P(x)} = f(x)$$

$$K'(x) = f(x)\,e^{P(x)} \,, \quad x \in (a,b)$$

a tedy

$$\underline{K(x) = \int f(x)e^{P(x)}dx} \quad (= \Phi(x) + C \,,\ C \in \mathbb{R})$$

a obecné řešení rovnice (1) je pak ve tvaru

$$\underline{y(x) = (\phi(x) + C)\, e^{-P(x)}, \quad x \in (a,b),\ C \in R}$$

<u>Řešení počáteční úlohy:</u> $y(x_0) = y_0$, $x_0 \in (a,b)$, $y_0 \in R$

$$y_0 = (\phi(x_0) + C)\, e^{-P(x_0)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{C = y_0 e^{P(x_0)} - \phi(x_0)}$$

<u>Poznámka:</u>

Má-li lineární rovnice tvar

$$y' + p(x)y = k \cdot p(x),$$

pak lze řešit pomocí separace:

$$y' = (k - y) \cdot p(x)$$

<u>Příklad:</u> $$\underline{y' + \frac{y}{x} = e^{-x^2}}$$

zde: $p(x) = \frac{1}{x}$, spojitá v $(-\infty, 0)$ a $(0, +\infty)$

$q(x) = e^{-x^2}$, spojitá také v int. $(-\infty, 0)$ a $(0, +\infty)$,

tedy (dle věty): pro každou počáteční podmínku $y(x_0) = y_0$, $x_0 \neq 0$ a $y_0 \in R$ existuje právě jedno řešení dané rovnice

<u>Výpočet řešení (obecného)</u>

1) řešení homogenní rovnice

$$\underline{y' + \frac{y}{x} = 0}$$

α) $y(x) = 0$ (je nulové řešení), $x \in (-\infty, 0)$ a $x \in (0, +\infty)$

tj. $$\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{1}{x}\,dx \qquad (je\text{-}li\ y \neq 0)$$

$$\ln|y| = -\ln|x| + c$$

$$|y| = \frac{e^c}{|x|}$$

a (*) $$y = \frac{k}{x}, \quad x \in (-\infty, 0),\ x \in (0, +\infty),\ k \neq 0 \quad (k = \pm e^c)$$

<u>obecné řešení homogenní rovnice:</u> („zahrnuje" i (*) $y(x)=0$)

$$y_H(x) = \frac{k}{x}, \quad k \in \mathbb{R},\ x \in (-\infty, 0),\ x \in (0, +\infty)$$

---

b) <u>Variace konstant:</u> řešení hledáme ve tvaru

$$y(x) = \frac{k(x)}{x}$$

dosazením do zadané rovnice dostaneme:

$$\left(\frac{k(x)}{x}\right)' + \frac{1}{x}\cdot\frac{k(x)}{x} = e^{-x^2}$$

$$\frac{k'(x)}{x} - \cancel{\frac{k(x)}{x^2}} + \cancel{\frac{k(x)}{x^2}} = e^{-x^2}$$

$$k'(x) = x e^{-x^2}$$

$$k(x) = \int x e^{-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\int -2x e^{-x^2}\,dx = -\frac{1}{2} e^{-x^2} + C \quad (\text{subst. } -x^2 = t)$$

Tedy, obecné řešení je

$$\underline{y(x) = \left(C - \frac{1}{2} e^{-x^2}\right)\cdot\frac{1}{x}}, \quad C \in \mathbb{R},\ x \in (-\infty, 0) \text{ nebo } x \in (0, +\infty)$$

<u>Počáteční úloha:</u> hledáme řešení, pro které je $y(1) = 0$:

$$0 = C - \frac{1}{2}\cdot e^{-1} \Rightarrow C = \frac{1}{2e},$$

řešení: $$\underline{y(x) = \frac{1}{2x}\left(\frac{1}{e} - e^{-x^2}\right), \quad x \in (0, +\infty)}$$