NEVLASTNÍ INTEGRÁL

1) integrál, jehož obor integrace je neomezený interval
(tj. (a,∞) nebo $(-\infty,a)$ nebo $(-\infty,+\infty)$)

2) integrál z funkce, která není omezená v oboru integrace

Poznámka: Riemannův integrál $\int_a^b f(x)dx$ ex. $\Rightarrow$ $a,b\in R$ a funkce f je omezená v (a,b), tedy nevlastní integrál „rozšiřuje" možnost integrovat i přes neomezený interval i integrovat neomezené funkce

1) Integrály přes neomezený interval

Definice: 1, f je Riemann. integrovatelná v $\langle a,b\rangle$, $b\in\langle a,+\infty)$

2, nechť ex. $\lim\limits_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx$ vlastní ($\in R$);

pak říkáme, že $\int_a^\infty f(x)dx$ konverguje a

$$\boxed{\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx.}$$

3, když $\lim\limits_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx$ je nevlastní nebo neexistuje, říkáme, že $\int_a^\infty f(x)dx$ diverguje.

Příklady: 1) $$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^b \frac{1}{1+x^2}dx = \lim_{b\to\infty} \operatorname{arctg} b = \frac{\pi}{2},$$
integrál je tedy konvergentní a je roven $\frac{\pi}{2}$.

důležitý příklad („srovnávací funkce")

2) $$\int_1^\infty \frac{1}{x^p}dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{1}{x^p}dx = \lim_{b\to\infty}\left[\frac{1}{1-p}\,\frac{1}{x^{p-1}}\right]_1^b = \frac{1}{p-1},\ p>1$$

tj. integrál konverguje $\Leftrightarrow$ $p>1$ ($\Leftarrow \lim\limits_{b\to\infty}\frac{1}{b^{p-1}}=0$)

(pro $p\leq 1$ diverguje)

3) $\int_1^{\infty} \frac{1}{x}\,dx = \lim_{b\to+\infty} \int_1^b \frac{1}{x}\,dx = \lim_{b\to\infty} \ln b = +\infty$ (integrál diverguje k $+\infty$)

4) $\int_0^{\infty} \cos x\,dx \overset{?}{=} \lim_{b\to\infty} \int_0^b \cos x\,dx = \lim_{b\to\infty} \sin b$ – neexistuje (integrál diverguje – osciluje)

Definice (ostatní případy)

a) $\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx \overset{?}{=} \lim_{b\to-\infty} \int_b^a f(x)\,dx$ (f je Riemann. integrovatelná v (b,a), $\forall b \in (-\infty, a)$)

b) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ konverg., když konvergují $\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx$ i $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ pro nějaké $a \in R$, (konvergence nezávisí na volbě a) a $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx + \int_a^{+\infty} f(x)\,dx$.

Příklady: 1) $\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{b\to-\infty} \int_b^0 \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{b\to-\infty} [\operatorname{arctg} 0 - \operatorname{arctg} b] = \frac{\pi}{2}$

2) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$ konverg, neboť konvergují integrály $\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$ i $\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}\,dx$

a $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}\,dx + \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$

3) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2x}{1+x^2}\,dx$ diverguje, protože $\int_0^{+\infty} \frac{2x}{1+x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty} \ln(1+b^2) = +\infty$ (diverguje!)

4) $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2-1}\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_2^b \frac{1}{x^2-1}\,dx = \lim_{b\to\infty} \frac{1}{2} \int_2^b \left(\frac{1}{x-1} + \frac{-1}{x+1} \right) dx$

$= \lim_{b\to\infty} \frac{1}{2} \left(\ln(b-1) - \ln(b+1) + \ln 3 \right) = \lim_{b\to\infty} \frac{1}{2} \left(\ln \underbrace{\frac{b-1}{b+1}}_{\to 0} + \ln 3 \right)$

$= \frac{\ln 3}{2}$.

(integrál konverguje)

Kritéria konvergence (jak lze z předpisu původní funkce zjistit konvergenci, respektive divergenci)

(pro $\int_a^{\infty} f(x)dx$ – ostatní případy analogicky)

I. Nutná podmínka konvergence

$$\int_a^{\infty} f(x)dx \text{ konverguje, ex. } \lim_{x\to+\infty} f(x) \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

$$\left(\text{tj. } \lim_{x\to+\infty} f(x) \neq 0 \Rightarrow \int_a^{\infty} f(x)dx \text{ diverguje} \right)$$

Př. $\int_1^{\infty} \frac{2x^2}{1+3x^2}dx$ diverguje $\left(\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2}{1+3x^2} = \frac{2}{3} \right)$

II. Integrály z nezáporných funkcí

1. Srovnávací kritérium (pro integrály z nezáporných funkcí)

$$\left.\begin{array}{l} 0 \le f(x) \le g(x) \quad \text{v } \langle a, +\infty) \\ \int_a^{\infty} g(x)dx \text{ konverguje} \end{array}\right\} \Rightarrow \int_a^{\infty} f(x)dx \text{ konverguje}$$

$$\left(\Leftrightarrow \int_a^{\infty} f(x)dx \text{ diverguje} \Rightarrow \int_a^{\infty} g(x)dx \text{ diverguje} \right)$$

2. Limitní srovnávací kritérium

$0 \le f(x)$, $0 < g(x)$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = A \quad \begin{cases} A > 0, \text{ pak } \int_a^{\infty} f(x)dx \text{ konverg.} \Leftrightarrow \int_a^{\infty} g(x)dx \text{ konverg.} \\ A = 0, \text{ pak } \int_a^{\infty} g(x)dx \text{ konverg.} \Rightarrow \int_a^{\infty} f(x)dx \text{ konverg.} \end{cases}$$

Příklady

1) $\int_0^{\infty} \frac{x}{x^{11}+2}dx$ konverguje, neboť: (srovnávací kritérium)

$$\left.\begin{array}{l} \frac{x}{x^{11}+2} \le \frac{x}{x^{11}} = \frac{1}{x^{10}}, \quad \text{v } \langle 1, +\infty) \\ \int_1^{\infty} \frac{1}{x^{10}}dx \text{ konverg. } (p=10) \end{array}\right\} \Rightarrow \int_1^{\infty} \frac{x}{x^{11}+2}dx \text{ konverg.} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_0^{\infty} \frac{x}{x^{11}+2}dx \text{ konverg.}$$

$\left(\int_0^1 \frac{x}{x^{11}+2}dx \text{ ex. v R. smyslu} \right)$

2) $\int_1^\infty \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2}\,dx$ konverguje (srovnávací krit.; nebo srovnávací limitní)

a) $\frac{\operatorname{arctg} x}{x^2} \le \frac{\frac{\pi}{2}}{x^2}$, $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$ konverg. $\Rightarrow \int_1^\infty \frac{\frac{\pi}{2}\,dx}{x^2}$ konv.

nebo

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\frac{\operatorname{arctg} x}{x^2}}{\frac{1}{x^2}} = \frac{\pi}{2}$

3) $\int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg} x}{\sqrt{x}+1}\,dx$ diverguje (limitní srovnávací)

$$\left.\begin{aligned}&\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\frac{\operatorname{arctg} x}{\sqrt{x}+1}}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}\cdot \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}\\ &\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx \text{ diverguje}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg} x}{\sqrt{x}+1}\,dx \text{ div.}$$

4) $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$ konverguje: (srovnávací)

$$\left.\begin{aligned}&e^{-x^2} \le e^{-x}, \quad x \in \langle 1, +\infty)\\ &\int_1^\infty e^{-x}\,dx = \lim_{b\to\infty} \left[e^{-x}\right]_1^b = -e^{-1}, \text{ tedy konverguje}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{srovnávací kritérium}$$

$\Rightarrow \int_1^\infty e^{-x^2}\,dx$ konv. $\Rightarrow \int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$ konverguje

5) $\int_1^\infty \frac{\ln x}{x^2+3}\,dx$ konverguje (limitní srovnávací)

$$\left.\begin{aligned}&\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\frac{\ln x}{x^2+3}}{\frac{1}{x^{3/2}}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{\frac{3}{2}}}{x^2+3}\cdot \ln x = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{\frac{3}{2}} \ln x}{x^2+3} = 0,\\ &\int_1^\infty \frac{1}{x^{3/2}}\,dx \text{ konv.}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{zadaný integrál konverguje}$$

III. Integrál z libovolných funkcí

Absolutní konvergence

$$\int_a^\infty |f(x)|\,dx \text{ konv.} \Rightarrow \int_a^\infty f(x)\,dx \text{ konverguje}$$

Př. $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^2}\,dx$ absolutně konverguje:

$$\left.\begin{array}{l} \left|\frac{\sin x}{x^2}\right| \le \frac{1}{x^2} \\ \int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx \text{ konv.} \end{array}\right\} \Rightarrow \int_1^\infty \left|\frac{\sin x}{x^2}\right| dx \text{ konv.} \Rightarrow \int_1^\infty \frac{\sin x}{x^2}\,dx$$

konverguje (absolutně)

! ale: $\int_1^\infty \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx$ diverguje a $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$ konverguje,

tj. když $\int_a^\infty |f(x)\,dx$ diverguje, o $\int_a^\infty f(x)\,dx$ nevíme odtud nic!

Vlastnosti $\int_a^\infty f(x)\,dx$:

1) f je integrovatelná v $\langle a, b)$ pro každé $b \in \langle a, +\infty)$, pak

$$\int_a^\infty f(x) \text{ konverguje} \Leftrightarrow \int_\alpha^\infty f(x) \text{ konverguje}, \quad \alpha > a;$$

(tj. konvergenci či divergenci lze dokázat pomocí na „menším" intervalu)

2) $\int_a^\infty (f(x)+g(x))\,dx = \int_a^\infty f(x)\,dx + \int_a^\infty g(x)\,dx$, když konvergují aspoň dva z integrálů;

3) $\int_a^\infty c f(x)\,dx = c\int_a^\infty f(x)\,dx$, když $\int_a^\infty f(x)\,dx$ konverguje.

4) $f(x) \le g(x)$ v $\langle a, +\infty)$, $\int_a^\infty f(x)\,dx$, $\int_a^\infty g(x)\,dx$ konvergují $\Rightarrow \int_a^\infty f(x)\,dx \le \int_a^\infty g(x)\,dx$.

2) Integrály z neomezených funkcí

(integrály nevlastní vzhledem funkce)

Definice: 1) f je Riemann-integrovatelná v $\langle a, \xi \rangle$
(integrál nevlastní vzhledem horní mezi) pro $\forall \xi \in \langle a, b)$ $(b \in R)$
f není omezená v žádném $\mathcal{P}(b)$ (levé prstencové okolí bodu b (tj. není omezená v $(b-\varepsilon, b)$, $\varepsilon > 0$)

2) nechť existuje vlastní limita

$$\lim_{\xi \to b-} \int_a^{\xi} f(x)dx \,;$$

pak říkáme, že $\int_a^b f(x)dx$ konverguje a $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\xi \to b-} \int_a^{\xi} f(x)dx$.

Definice: (analogicky): 1) f je Riemann-integrovatelná v $\langle \eta, b \rangle$
(integrál nevlastní vzhledem dolní meze) pro $\forall \eta \in (a, b\rangle$, f není omezená v žádném pravém okolí a

2) nechť existuje vlastní limita

$$\lim_{\eta \to a+} \int_{\eta}^{b} f(x)dx \,;$$

pak říkáme, že $\int_a^b f(x)dx$ konverguje a $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\eta \to a+} \int_{\eta}^{b} f(x)dx$.

Ostatní případy 1) f není omezená v žádném okolí bodu a i bodu b,

pak $\int_a^b f(x)dx$ konverguje $\Leftrightarrow$ $\int_a^c f(x)dx$ konverg. i $\int_c^b f(x)dx$ konverguje (pro nějaké $c \in (a, b)$)

a $$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

(definice nezávisí na volbě bodu $c \in (a, b)$)

2) f není omezená v žádném $\mathcal{P}(c)$, $c \in (a, b)$,
f je integrovatelná v $\langle a, c-\varepsilon \rangle$ i $\langle c+\delta, b \rangle$ pro $\forall \varepsilon, \delta > 0$

pak $\int_a^b f(x)dx$ konverguje $\Leftrightarrow$ konvergují oba integrály $\int_a^c f(x)dx$ a $\int_c^b f(x)dx$

a $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.

Příklady:

1) $$\int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{x}}dx \overset{?}{=} \lim_{\eta\to 0+} \int_\eta^1 \frac{1}{2\sqrt{x}}dx = \lim_{\eta\to 0+} \left[\sqrt{x}\right]_\eta^1 = \lim_{\eta\to 0+} (1-\sqrt{\eta}) = 1,$$

($\lim_{x\to 0+} \frac{1}{2\sqrt{x}} = +\infty \Rightarrow$ fce $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ není omezená v žádném pravém okolí bodu 0)

integrál tedy konverguje

2) analogicky (důležitý příklad - srovnávací funkce)

! $\int_0^1 \frac{1}{x^p}dx$ konverg. $\Leftrightarrow$ $p<1$

$\int_a^b \frac{1}{2\sqrt{x-a}}dx$ konverg, a ! $\int_a^b \frac{1}{(x-a)^p}dx$ konverg. $\Leftrightarrow$ $p<1$

($a<b$)

! $\int_a^b \frac{1}{(b-x)^p}dx$ konverg. $\Leftrightarrow$ $p<1$

3) $\int_1^2 \frac{1}{(2-x)^2}dx$ diverguje; neboť

$$\lim_{\xi\to 2-} \int_1^\xi \frac{1}{(2-x)^2}dx = \lim_{\xi\to 2-} \left[\frac{1}{2-x}\right]_1^\xi = \lim_{\xi\to 2-} \left(\frac{1}{2-\xi} - 1\right) = +\infty$$

4) $$\int_0^1 \ln x\, dx \overset{?}{=} \lim_{\eta\to 0+} \int_\eta^1 \ln x\, dx = \lim_{\eta\to 0+} \left[x\ln x - x\right]_\eta^1 =$$

(per partes)

$$= \lim_{\eta \to 0+} \left(-1 - (\eta \ln \eta - \eta) \right) = -1 \qquad \left(\lim_{\eta \to 0+} \eta \ln \eta = 0 \right),$$

tedy $\int_0^1 \ln x \, dx = -1$ (konverguje).

Kritéria konvergence (analogické kritériím pro integrál přes neomezený interval).

I. Kritéria pro integrály z nezáporných funkcí:

1. Srovnávací kritérium (integrál nevlastní vlivem horní meze)

$0 \le f(x) \le g(x)$ v $\langle a, b)$, $\int_a^b g(x)\,dx$ konverguje $\Rightarrow$

$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx$ konverguje

$\left(\Leftrightarrow \int_a^b f(x)\,dx \text{ diverguje} \Rightarrow \int_a^b g(x)\,dx \text{ diverguje} \right)$

2. Limitní srovnávací kritérium (integrál nevlastní vlivem horní meze)

$0 \le f(x)$, $0 < g(x)$

$$\lim_{x \to b-} \frac{f(x)}{g(x)} = A \quad \begin{cases} A > 0, \text{ pak } \int_a^b f(x)\,dx \text{ konverg.} \Leftrightarrow \int_a^b g(x)\,dx \text{ konverg.} \\ A = 0, \text{ pak } \int_a^b g(x) \text{ konverg.} \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \text{ konverg.} \end{cases}$$

Analogicky pro integrál nevlastní vlivem dolní meze.

Příklady:

1) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)x}}\,dx$ konverguje: (nevlastní vlivem obou mezí)

a) $\int_0^{\frac12} \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)\cdot x}}\,dx$: $\lim_{x \to 0+} \dfrac{\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)x}}}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \lim_{x \to 0+} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1$,

$\left(\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)\cdot x}} \text{ se „chová" jako } \frac{1}{\sqrt{x}} \text{ u } 0+ \right)$

$$\left.\begin{array}{l} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx \text{ konverg.,} \\ \lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)x}}}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = 1 \end{array}\right\} \underset{\text{limitní sr. krit.}}{\Longrightarrow} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)x}}\,dx \text{ konverg.}$$

b) $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)x}}\,dx$: $\displaystyle\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)x}} = \frac{1}{\underset{\to 0}{\sqrt{1-x}}\;\underset{\to\sqrt{2}}{\sqrt{(1+x)\cdot x}}}$, tedy

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1-} \dfrac{\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)\cdot x}}}{\frac{1}{\sqrt{1-x}}} = \lim\limits_{x\to 1-} \dfrac{1}{\sqrt{(1+x)x}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} > 0 \\ \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,dx \text{ konverg.} \end{array}\right\} \underset{\text{limitní krit.}}{\Longrightarrow} \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)x}}\,dx \text{ konverguje;}$$

Tedy, konverguje i $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)x}}\,dx$.

2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{\sin x}}\,dx$ konverg.: $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$, tedy $\sin x \sim x$ pro $x \to 0$,

odtud:
$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{\frac{1}{\sqrt{\sin x}}}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = 1 \\ \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx \text{ konverg.} \end{array}\right\} \Rightarrow \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{\sin x}}\,dx \text{ konverg.}$$

3) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1-\cos 2x}\,dx$ diverg. : $\displaystyle\frac{1-\cos 2x}{2} = \sin^2 x$, tedy

$\displaystyle\frac{1}{1-\cos 2x} = \frac{1}{2\sin^2 x}$, $\sin x \sim x$ pro $x \to 0$, tedy

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{\frac{1}{1-\cos 2x}}{\frac{1}{2x^2}} = \lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{\frac{1}{2\sin^2 x}}{\frac{1}{2x^2}} = 1 \\ \int_0^1 \frac{1}{2x^2}\,dx \text{ diverg.} \end{array}\right\} \underset{\text{limitní srovnávací krit.}}{\Longrightarrow} \int_0^1 \frac{1}{1-\cos 2x}\,dx \text{ diverguje}$$