Zápočtový test č. 1. Jméno: Datum:

1. Určete obory, kde existují derivace následujících funkcí a tyto derivace vypočtěte.

1) $f(x) = e^{-3x^2}$, $\mathcal{D}f = R$

(2) $f'(x) = -6x \cdot e^{-3x^2}$, $\mathcal{D}f' = R$

2) $f(x) = x \cdot \cos^3(2x)$, $\mathcal{D}f = R$,

(2) $f'(x) = \cos^3(2x) + x \cdot (-3 \cdot \sin(2x) \cdot \cos^2(2x) \cdot 2)$, $\mathcal{D}f' = R$

3) $f(x) = \sqrt{1 - e^x}$, $\mathcal{D}f = \{x \in R;\ 1 - e^x \geq 0\} = (-\infty, 0\rangle$

(3) $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1-e^x}} \cdot (-e^x)$, $\mathcal{D}f' = (-\infty, 0)$, $f'(0-) = -\infty$

4) $f(x) = \ln(\operatorname{arcotg}\sqrt{x})$, $\mathcal{D}f = \{x \in R;\ \operatorname{arcotg}\sqrt{x} > 0\} = (0, +\infty)$

(3) $f'(x) = \frac{1}{\operatorname{arcotg}\sqrt{x}} \cdot \frac{-1}{1+x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $x \in (0, +\infty)$

5) $f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$, $\mathcal{D}f = \{x;\ \frac{x+1}{x-1} \geq 0\} = (-\infty, -1\rangle \cup (1, +\infty)$

(3) $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}} \cdot \left(\frac{x+1}{x-1}\right)' = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \cdot \frac{-2}{(x-1)^2} = -\frac{1}{(x-1)^2} \cdot \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$,

$\mathcal{D}f' = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

6) $f(x) = x^2 \cdot \sqrt{x+1} + e^{-\frac{1}{x}}$

$\mathcal{D}f = \{x;\ x+1 \geq 0 \wedge x \neq 0\} = \langle -1, 0) \cup (0, +\infty)$

(2)

$$f'(x) = 2x \cdot \sqrt{x+1} + \frac{x^2}{2\sqrt{x+1}} + \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}},$$

$$\mathcal{D}f' = (-1, 0) \cup (0, +\infty)$$

$$f'(-1+) = \lim_{x \to -1+} f'(x) = +\infty$$

2. Užitím l'Hospitalova pravidla vypočtěte:

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln 2x}{\sqrt{x}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\frac{1}{2x}\cdot 2}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{\sqrt{x}} = 0$

(2) $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ "

2. $\lim\limits_{x\to 0+} x\cdot\ln x = \lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to 0+} (-x) = 0$

(2) $0\cdot(-\infty)$ "

3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{-x^2}-1}{\cos x - 1} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{-x^2}(-2x)}{-\sin x} = \lim\limits_{x\to 0} 2e^{-x^2}\cdot \underbrace{\dfrac{x}{\sin x}}_{\to 1} = 2$

(2) $\frac{0}{0}$ "

4. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\cdot\ln\left(1-\dfrac{2}{x^2}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln\left(1-\frac{2}{x^2}\right)}{\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{\ln(1-2y)}{y} =$

(2) $\infty\cdot 0$ "

" $\left| y = \frac{1}{x^2} \right| = \lim \dfrac{\ln(1-2y)}{-2y}\cdot(-2) = -2$

3. Je dána funkce $f(x) = \left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^2$. Vyšetřete její průběh.

(2) a) Určete definiční obor, asymptoty bez směrnice, limity v krajních bodech intervalů z D_f;

(2) b) vypočtěte první derivace a určete intervaly, kde je funkce rostoucí, resp. klesající, označte body lokálních extrémů (případně i globálních)

(1) c) vypočtěte druhou derivaci a určete, kde je funkce konvexní, resp. konkávní, je-li inflexní body, napište v nich rovnici tečny ke grafu funkce

(1) d) načrtněte graf funkce f.